NGUYỄN MẠNH HÙNG

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠO HÀM RIÊNG

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Giáo trình lí thuyết và bài tập *Phương trình vi phân đạo hàm riêng* được viết dựa trên các bài giảng về phương trình đạo hàm riêng của tác giả trong mười năm trở lại đây tại khoa Toán -Tin, trường Đại học Sư phạm Hà Nội. Để phù hợp với chương trình giảng dạy môn *Phương trình đạo hàm riêng* cho năm thứ ba khoa Toán-Tin của Trường, chúng tôi chia giáo trình làm bốn chương, có phần phụ lục và hướng dẫn giải bài tập.

Chương I trình bày một số bài toán vật lí và các khái niệm cơ bản của phương trình đạo hàm riêng. Phương trình Laplace đại diện cho phương trình loại elliptic được đưa vào chương II, trong đó tác giả trình bày các tính chất cơ bản của hàm điều hòa và nghiên cứu bài toán Dirichlet trong miền bị chặn. Chương III và IV trình bày các vấn đề cơ bản liên quan đến phương trình truyền sóng và phương trình truyền nhiệt, đó là các phương trình đơn giản đại diện cho hai lớp phương trình đạo hàm riêng: phương trình hyperbolic và phương trình parabolic. Cuối mỗi chương đều có phần bài tập nhằm khắc sâu lí thuyết. Phần phụ lục phục vụ cho sinh viên lớp chất lượng cao khoa Toán-Tin của Trường. Do vậy, chúng tôi bổ sung phân loại phương trình đạo hàm riêng trong lí thuyết phương trình đạo hàm riêng hiện đại. Tiếp theo bài toán Cauchy đối với hệ hyperbolic đối xứng cấp một được đưa vào và cuối cùng là chứng minh sự tồn tại nghiệm giải tích của định lí Kovalepskaia mà tính duy nhất của nghiệm đã được chứng minh trong chương I. Cuối sách là phần hướng dẫn giải bài tập của bốn chương đầu nhằm giúp sinh viên tự kiểm tra kĩ năng giải bài tập của mình.

Giáo trình nhằm phục vụ chủ yếu cho sinh viên khoa Toán-Tin, trường Đại học Sư phạm Hà Nội. Tuy nhiên, giáo trình này cũng có thể làm tài liệu tham khảo cho sinh viên các ngành Toán, Toán-Tin ứng dụng, Công nghệ Thông tin, Kĩ thuật Điện tử, Kĩ thuật Điện và các ngành kĩ thuật khác trong các trường đại học. Ngoài ra, giáo trình còn có thể giúp ích cho các đọc giả muốn tìm hiểu về môn học *Phương trình đạo hàm riêng.*

Cuối cùng, tác giả xin chân thành cám ơn các ý kiến đóng góp của các nhà toán học, đặc biệt là các thành viên của bộ môn Giải tích, khoa Toán-Tin, trường Đại học Sư phạm Hà Nội để cuốn sách được hoàn thiện hơn. Tác giả cũng mong tiếp tục nhận được các ý kiến đóng góp cho cuốn sách.

TÁC GIẢ

CÁC KÍ HIỆU VÀ ĐỊNH NGHĨA CHUNG

Ta đưa vào các kí hiệu và định nghĩa được dùng trong cuốn sách. R^n được kí hiệu là không gian Euclide n - chiều với các điểm $x = (x_1, \ldots, x_n), x_j \in R$ (R là tập các số thực); $|x| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$. Đối với hai điểm $x = (x_1, \ldots, x_n)$ và $y = (y_1, \ldots, y_n)$ của không gian này, ta xét tích vô hướng

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

và khoảng cách giữa chúng

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}.$$

Một tập hợp mở liên thông trong không gian R^n được gọi là *miền* và kí hiệu là Ω. Miền Ω được gọi là *miền bị chặn* nếu mọi điểm $x \in \Omega$ đều thỏa mãn điều kiện $|x| \leqslant M$, ở đó M là một hằng số nào đó. Biên của miền Ω được kí hiệu là $\partial\Omega$, còn bao đóng của Ω là $\overline{\Omega}$. Như vậy $\partial\Omega = \overline{\Omega} \backslash \Omega$. Kí hiệu $B_r(y)$ là hình cầu mở trong R^n với tâm y, bán kính r; ω_n là thể tích hình cầu đơn vị trong R^n.

$$D^\alpha u = D_x^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), |\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j,$$

α_j là các số nguyên không âm.

Giả sử A là một tập hợp thuộc R^n. Một hàm $f(x)$ được xác định tại mọi điểm $x \in A$ được gọi là thuộc lớp $C^k(A)$ nếu $f(x)$ có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp k tại tất cả các điểm trong của A và các đạo hàm này thác triển liên tục được ra toàn bộ A, $k \geq 1$. Nếu $f(x)$ liên tục tại tất cả các điểm của tập hợp A, thì viết $f(x) \in C^0(A)$. Kí hiệu $C^\infty(A)$ là lớp các hàm $f(x) \in C^m(A), \forall m \geq 0$. Để phân biệt các biến, ta kí hiệu $R^{n+1}_{x,t}$ là không gian Euclide $n+1$ chiều, một điểm thuộc nó được kí hiệu là $(x,t) = (x_1, \dots, x_n, t)$. Giả sử $A \subset R^{n+1}_{x,t}$. Ta nói hàm $f(x,t) \in C^{k,m}(A)$, $k \geq 1, m \geq 1$, nếu $f(x,t)$ có các đạo hàm liên tục theo x đến cấp k, theo t đến cấp m tại mọi điểm trong của tập A và các đạo hàm này có thể thác triển được liên tục ra toàn bộ tập A. Miền $\Omega \subset R^n$ được gọi là thuộc lớp $A^k, k \geq 1$, nếu đối với một điểm bất kì $x^0 \in \partial\Omega$ tồn tại một số nguyên $\ell, 1 \leqslant \ell \leqslant n$, và một lân cận $U(x^0, \rho), \rho = \text{const} > 0$ sao cho $\partial\Omega \cap U(x^0, \rho)$ nằm trên siêu mặt

$$x_\ell = f_\ell(x_1, \dots, x_{\ell-1}, x_{\ell+1}, \dots, x_n),$$

thêm vào đó $f_\ell \in C^k(G_\ell)$, ở đó G_ℓ là miền biến thiên các đối số của hàm f_ℓ. Khi đó Ω được gọi chung là miền với biên trơn.

Miền Ω được gọi là *trơn từng khúc* nếu nó có thể xấp xỉ bởi các miền trơn. Ta đưa vào định nghĩa chính xác khái niệm này. Ta nói rằng, miền Ω thuộc lớp $B^k, k \geq 1$, nếu tồn tại một dãy các miền Ω_m sao cho $\Omega_m \in A^k, \Omega_m \subset \Omega, \Omega_m \subset \Omega_{m+1}$, và

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_m} dx \to 0, \int_{\partial\Omega_m \setminus \partial\Omega} ds \to 0$$

khi $m \to \infty$, ở đó ds là phần tử diện tích mặt $\partial\Omega_m$. Đối với các miền của lớp $A^k, k \geq 1$, cũng như đối với các miền của lớp $B^k, k \geq 1$, ta có công thức Gauss-Ostrogradsky

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^n u_j \nu_j ds,$$

ở đó $u_j \in C^1(\overline{\Omega}), \Omega \in A^k$ hoặc $\Omega \in B^k, \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ là pháp vectơ đơn vị ngoài tới $\partial\Omega, ds$ là phần tử diện tích $\partial\Omega$. Từ công thức này ta nhận được công thức tích phân từng phần: Nếu $u(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ và $v(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \Omega \in B^k$, thì

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = -\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_j} dx + \int_{\partial\Omega} uv\nu_j ds.$$

Công thức này nhận được từ công thức Gauss-Ostrogradsky khi đặt $u_i = 0$ với $i \neq j$ và $u_j = uv$.

Kí hiệu Δ là *toán tử Laplace* , tức là

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Trong giáo trình này ta nghiên cứu các *bài toán biên* và *bài toán Cauchy* đối với các *phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai* với một hàm ẩn sau:

$$\Delta u = 0 - \textit{Phương trình Laplace};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - \textit{Phương trình truyền sóng;}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \textit{Phương trình truyền nhiệt.}$$

Một cách tổng quát, phương trình liên hệ các hàm ẩn $u_1, \ldots, u_N$, các biến và các đạo hàm riêng của chúng được gọi là *phương trình đạo hàm riêng*.

Một phương trình đạo hàm riêng chứa ít nhất một đạo hàm cấp m và không chứa các đạo hàm cấp cao hơn m được gọi là *phương trình cấp m*. Cấp của hệ các phương trình đạo hàm riêng là cấp lớn nhất trong các cấp của các phương trình trong hệ.

Phương trình đạo hàm riêng được gọi là *tuyến tính*, nếu nó tuyến tính đối với tất cả các hàm ẩn và các đạo hàm của chúng. Phương trình đạo hàm riêng được gọi là *tựa tuyến tính*, nếu nó tuyến tính đối với tất cả các đạo hàm bậc cao nhất của các hàm ẩn.

Nghiệm của phương trình đạo hàm riêng là một hàm sao cho khi thay vào hàm ẩn, phương trình này biến thành đồng nhất thức theo các biến số độc lập. Nghiệm của hệ được định nghĩa tương tự.

CHƯƠNG I

PHÂN LOẠI PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG

§1. Một số bài toán vật lí dẫn đến phương trình đạo hàm riêng

Lí thuyết phương trình đạo hàm riêng mang hai nét đặc thù cơ bản. Thứ nhất là mối liên hệ trực tiếp với các bài toán vật lí. Quá trình nghiên cứu các phương trình đạo hàm riêng thường gặp trong vật lí dẫn tới hình thành một ngành mới của giải tích vào giữa thế kỷ XVIII: Phương trình vật lí toán. Đặt nền móng cho ngành khoa học này phải kể đến các nhà toán học J. D' Alembert (1717-1783), L. Euler (1707-1783), D. Bernoulli (1700-1782), J. Lagrange (1736-1813), P. Laplace (1749-1827), S. Poisson (1781-1840), J. Fourier (1768-1830). Các ý tưởng và phương pháp nghiên cứu của họ khi xem xét các bài toán cụ thể của vật lí toán có ảnh hưởng rất lớn đến sự phát triển lí thuyết tổng quát phương trình đạo hàm riêng vào cuối thế kỷ XIX.

Nét đặc thù thứ hai của lí thuyết phương trình đạo hàm riêng là mối quan hệ mật thiết của nó với các ngành toán học khác như giải tích hàm và lí thuyết hàm, tô pô, đại số, giải tích phức. Một mặt, lí thuyết phương trình đạo hàm riêng sử dụng các khái niệm cơ bản, các tư tưởng và phương pháp của các lĩnh vực toán học này; mặt khác nó ảnh hưởng lại đến các vấn đề và hướng nghiên cứu của chúng. Vào năm 1747, J. D' Alembert đưa ra phương trình dao động của dây và nhận được công thức biểu diễn nghiệm tổng quát của nó. Sau đó L. Euler cho một công thức nghiệm của bài toán Cauchy (1789-1857) đối với phương trình dao động của dây (công thức D'Alembert), còn D. Bernoulli chứng minh rằng một nghiệm bất kì của phương trình dao động của dây biểu diễn được bằng chuỗi lượng giác. Cuộc tranh luận về bản chất nghiệm của phương trình dao động của dây gữa ba nhà toán học có ý nghĩa quan trọng trong việc phát triển ngành vật lí toán, giải tích và đặc biệt là lí thuyết các chuỗi lượng giác. Tiếp theo vào năm 1822 khi xét bài toán truyền nhiệt J. Fourier đã nghiên cứu các vấn đề về khai triển một hàm thành chuỗi lượng giác và sau đó L. Dirichlet (1805-1859) lần đầu tiên chỉ ra điều kiện đủ để một hàm có thể khai triển được thành chuỗi lượng giác. Điều đó tạo điều kiện hình thành lí thuyết tập hợp và lí thuyết hàm hiện đại.

Việc nghiên cứu các phương trình vật lí toán làm nảy sinh ra nhiều phương pháp, chẳng hạn phương pháp Fourier, phương pháp Riesz, phương pháp Galerkin. Tính hữu hiệu của việc áp dụng các phương pháp này vào các vấn đề vật lí đòi hỏi lập luận toán học chặt chẽ. Từ đó hình thành các lí thuyết toán học mới, các hướng nghiên cứu mới: lí thuyết tích phân Fourier, lí thuyết khai triển thành các hàm riêng.

Để nhận được các phương trình từ các hiện tượng vật lí cần phải bỏ qua các yếu tố thứ yếu của hiện tượng, tức là phương trình chỉ mô tả các quy luật vật lí cơ bản (định luật bảo toàn năng lượng, động lượng, khối lượng, v.v...). Bằng cách đó có thể nhận được các phương trình mô tả các hiện tượng vật lí trong điện động lực học, thủy động học, lí thuyết đàn hồi và các lĩnh vực khác. Việc nghiên cứu các hiện tượng vật lí nhờ các mô hình toán học cho phép nhận biết không chỉ mặt định lượng mà cả bản chất các hiện tượng vật lí. Để làm ví dụ, ta xét một số bài toán cụ thể sau.

1. Phương trình truyền nhiệt. Giả sử nhiệt độ của vật thể Ω tại điểm $x = (x_1, x_2, x_3)$ và tại thời điểm t được xác định bởi hàm $u(x,t) \in C^{2,1}(\Omega \times [0,T])$. Ta coi Ω là vật thể đẳng hướng, tức là nhiệt truyền theo phương nào cũng như nhau.

Giả sử Ω_1 là miền con tùy ý của Ω với biên $\partial\Omega_1$ trơn. Ta xét sự thay đổi nhiệt trong Ω_1 sau một khoảng thời gian từ t_1 đến t_2.

Theo định luật Newton, sau khoảng thời gian từ t_1 đến t_2 lượng nhiệt truyền qua mặt $\partial\Omega_1$ bằng:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial\Omega_1} k(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} ds, \tag{1.1}$$

trong đó $\partial u/\partial \nu$ là *đạo hàm theo hướng pháp tuyến ngoài* đối với mặt $\partial\Omega_1, k(x)$ là hàm dương và được gọi là hệ số truyền nhiệt bên trong vật thể tại điểm x.

Trong vật thể có thể tự sinh ra nhiệt (chẳng hạn do tác động của dòng điện hay phản ứng hoá học). Khi đó lượng nhiệt sinh ra trong vật thể Ω_1 sau khoảng thời gian từ t_1 đến t_2 là:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega_1} f(x,t)dx, \tag{1.2}$$

ở đó $f(x,t)$ là mật độ nguồn nhiệt tại điểm x và thời điểm t.

Mặt khác sự thay đổi lượng nhiệt bên trong Ω_1 sau khoảng thời gian từ t_1 đến t_2 có thể được xác định qua sự thay đổi nhiệt độ. Sự thay đổi lượng nhiệt này bằng:

$$\int_{\Omega_1} c(x)\rho(x)[u(x,t_2) - u(x,t_1)]dx, \tag{1.3}$$

ở đây $\rho(x)$ là mật độ khối lượng và $c(x)$ là nhiệt dung của vật thể tại điểm x. Ta giả thiết rằng $k(x) \in C^1(\Omega), f(x,t) \in C^0(\Omega \times [0,T]), \rho(x) \in C^0(\Omega)$ và $c(x) \in C^0(\Omega)$. Từ (1.1), (1.2) và (1.3), theo định luật bảo toàn năng lượng ta nhận được đẳng thức:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1} c(x)\rho(x)[u(x,t_2) - u(x,t_1)]dx = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial\Omega_1} k(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}ds + \\ + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega_1} f(x,t)dx. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Theo công thức Gauss - Ostrogradsky ta có:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial\Omega_1} k(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}ds = \sum_{i=1}^{3} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial x_i}(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_i})dx.$$

Bởi vậy đẳng thức (1.4) có thể viết dưới dạng:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega_1} c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}dx = \sum_{i=1}^{3} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial x_i}(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_i})dx$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega_1} f(x,t)dx. \tag{1.5}$$

Bởi vì Ω_1 là miền con tùy ý của Ω và khoảng thời gian (t_1, t_2) tùy ý, các hàm dưới dấu tích phân là liên tục, nên từ (1.5) suy ra

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}) + f(x,t) \tag{1.6}$$

với mọi $t \in [0, T]$ và mọi $x \in \Omega$.

Phương trình (1.6) được gọi là *phương trình truyền nhiệt* Lần đầu tiên phương trình này được Fourier thiết lập vào năm 1822 với $f(x,t) \equiv 0$ và $c(x), \rho(x), k(x)$ là các hằng số. Sau đó nó trở thành đối tượng nghiên cứu của nhiều nhà toán học trong thế kỷ XIX.

Trong thực tiễn, chế độ nhiệt ở trên biên của vật thể ảnh hưởng đến sự phân bố nhiệt bên trong của nó. Ngoài ra, nhiệt độ bên trong vật thể tại thời điểm ban đầu $t = 0$ và nhiệt độ trên biên vật thể tại thời điểm bất kì $t \geq 0$ xác định một cách đơn trị nhiệt độ vật thể khi $t > 0$.

Bài toán tìm nghiệm của phương trình (1.6) thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$u|_{t=0} = u_0(x) \tag{1.7}$$

và điều kiện biên dạng

$$u|_{\partial\Omega\times[0,T]} = \varphi, \tag{1.8}$$

gọi là *bài toán biên ban đầu thứ nhất* đối với phương trình (1.6).

Nếu biết được lượng nhiệt truyền qua một phần bất kì của biên vật thể sau một khoảng thời gian từ t_1 đến t_2, thì theo định luật

Newton đạo hàm theo hướng pháp tuyến đối với biên được xác định đơn trị tại mỗi điểm của biên và tại một thời điểm bất kì. Từ đó nảy sinh ra *bài toán biên ban đầu thứ hai* đối với phương trình (1.6), tức là bài toán tìm nghiệm $u(x,t)$ của phương trình (1.6) thỏa mãn điều kiện ban đầu (1.7) và điều kiện biên dạng

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega\times[0,T]} = \psi. \tag{1.8'}$$

2. Phương trình Laplace. Trong ví dụ trên, nếu nhiệt độ của vật thể ổn định, tức là không phụ thuộc vào thời gian, thì hàm $u(x)$ cho phân bố dừng của nhiệt độ và thỏa mãn phương trình:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x). \tag{1.9}$$

Phương trình (1.9) lần đầu tiên được S. Poisson đưa ra vào năm 1813 và được gọi là *phương trình Poisson*. Trong trường hợp $f(x) \equiv 0$ phương trình (1.9) được gọi là *phương trình Laplace*. Phương trình này được thấy trong các công trình của L. Euler và J. Lagrange, nhưng lần đầu tiên nó được nghiên cứu một cách hệ thống trong các công trình của P. Laplace vào năm 1782 và 1787.

Bài toán tìm phân bố dừng của nhiệt độ bên trong vật thể theo nhiệt độ đã cho trên biên được gọi là *bài toán Dirichlet* theo tên nhà toán học L. Dirichlet, ông là người đầu tiên chứng minh được sự duy nhất nghiệm của bài toán này.

3. Phương trình truyền sóng. Có nhiều quá trình dao động được mô tả bởi phương trình

$$a^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, a = \text{const} > 0. \tag{1.10}$$

Phương trình này được gọi là *phương trình truyền sóng*. Trường hợp $n = 1$ phương trình (1.10) mô tả dao động của dây.

Giả thiết vị trí ban đầu của sợi dây trùng với trục Ox và nó dao động trong mặt thẳng đứng nhờ một tác động nào đó. Để đơn giản ta coi mỗi điểm của dây dịch chuyển thẳng góc với trục Ox và trong cùng một mặt phẳng (x, u). Tung độ u cho độ lệch của dây khỏi vị trí cân bằng. Như vậy u là hàm của hai biến x và t. Giả thiết thêm rằng dây thuần nhất và có độ dày như nhau, hơn nữa dây không giãn nhưng không cưỡng lại sự uốn và sau thời điểm ban đầu không có ngoại lực nào tác động vào dây nữa. Khi đó hàm $u(x, t)$ thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1.11}$$

ở đây a là hằng số phụ thuộc vào các tính chất vật lí của dây.

Nếu tại vị trí cân bằng dây trùng với đoạn $[0, \ell]$ của trục Ox và được cố định ở hai đầu mút thì việc xác định hình dáng của dây tại một thời điểm bất kì dẫn đến bài toán tìm nghiệm của phương trình (1.11) thỏa mãn các điều kiện biên

$$u(0, t) = 0, u(\ell, t) = 0,$$

và các điều kiện ban đầu

$$u|_{t=0} = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1(x).$$

Phương trình (1.11) là một trong các phương trình đạo hàm riêng đầu tiên được nghiên cứu chi tiết vào thế kỷ XVIII. Nhiều quy luật vật lí và cơ học khác cũng đưa đến các phương trình tương tự với (1.11). Chẳng hạn quy luật dao động của màng được biểu diễn bởi phương trình (1.10) với $n = 2$, hoặc quy luật dao động nhỏ của chất khí lí tưởng được mô tả nhờ (1.10) với $n = 3$.

§2. Bài toán Cauchy. Khái niệm về đặc trưng. Định lí Kovalepskaia

1. Bài toán Cauchy. Định lí Kovalepskaia

Giả sử Ω là miền nào đó trong không gian R^n (có thể trùng với R^n). Xét trong Ω phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u = f(x), \tag{1.12}$$

ở đó a_{ij}, a_i, a, f là các hàm nhận giá trị phức và đủ trơn.

Nếu $n = 1$ và $a_{11} \neq 0$ thì (1.12) viết lại được dưới dạng

$$u'' + b(t)u' + c(t)u = f(t), \qquad t = x_1. \tag{1.13}$$

Bài toán tìm nghiệm của phương trình (1.13) thỏa mãn các điều kiện ban đầu $u(t^0) = u_0, u'(t^0) = u_1$, là bài toán Cauchy trong phương trình vi phân thường.

Trong lí thuyết phương trình vi phân thường, định lí Cauchy khẳng định rằng phương trình (1.13) có nghiệm giải tích duy nhất trong một lân cận nào đó của điểm t^0, thỏa mãn các điều kiện ban đầu nếu các hệ số và số hạng tự do của phương trình này là các hàm giải tích trong khoảng $(a, b), t^0 \in (a, b)$. Một cách tự nhiên, việc mở rộng bài toán Cauchy từ phương trình vi phân thường sang phương trình đạo hàm riêng được tiến hành như sau.

Ta tách một biến trong các biến $(x_1, \dots, x_n)$, chẳng hạn x_n và đặt $t = x_n$. Trong vật lí, t giữ vai trò thời gian, còn $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ là các toạ độ không gian. Giả sử trên mặt phẳng $t = t^0$ và trong một lân cận của điểm $x'_0 = (x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)$ cho các điều kiện ban đầu

$$u|_{t=t^0} = u_0(x'), \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=t^0} = u_1(x'). \tag{1.14}$$

Bài toán tìm nghiệm của phương trình (1.12) trong một lân cận nào đó của $x^0 = (x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, t^0)$ với các điều kiện ban đầu (1.14) được gọi là *bài toán Cauchy*.

Như vậy bài toán Cauchy (1.12), (1.14) là sự suy rộng tự nhiên của bài toán Cauchy trong phương trình vi phân thường. Vấn đề đặt ra là với giả thiết nào thì bài toán Cauchy (1.12), (1.14) có nghiệm. Vào năm 1874, S. V. Kovalepskaia (1850-1891) chứng minh được định lí tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy trong lớp các hàm giải tích và nó được mang tên là định lí Kovalepskaia. Như vậy, định lí Cauchy đã được S. V. Kovalepskaia mở rộng cho phương trình đạo hàm riêng.

Giả sử phương trình (1.12) viết được dưới dạng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n-1} b_{in}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x)u + h(x) \qquad (1.15)$$

Định lí Kovalepskaia. *Giả sử $b_{ij}, b_{in}, b_i, b, h$ là các hàm giải tích trong một lân cận của điểm x^0, còn $u_j, j = 0, 1$ là các hàm giải tích trong một lân cận của điểm x'_0. Khi đó bài toán Cauchy (1.15), (1.14) có nghiệm giải tích trong một lân cận nào đó của điểm x^0 và là nghiệm duy nhất trong lớp các hàm giải tích.*

Chứng minh. Trước tiên ta chứng minh tính duy nhất. Ta sẽ chứng minh rằng nếu nghiệm giải tích $u(x)$ của bài toán Cauchy (1.15),(1.14) tồn tại, thì các hệ số trong khai triển thành chuỗi luỹ thừa của nó được xác định duy nhất. Giả sử $u(x)$ được khai triển thành chuỗi luỹ thừa hội tụ tuyệt đối:

$$u(x) = u(x', t) = \sum_{\alpha', \alpha_n} C_{\alpha', \alpha_n}(x' - x'_0)^{\alpha'}(t - t^0)^{\alpha_n},$$

ở đó

$$\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}), (x' - x'_0)^{\alpha'} = (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \ldots (x_{n-1} - x_{n-1}^0)^{\alpha_{n-1}},$$

$$C_{\alpha', \alpha_n} = \frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_n!} D_{x'}^{\alpha'} D_t^{\alpha_n} u(x'_0, t^0).$$

Nhờ lấy đạo hàm đẳng thức (1.14) theo x' ta nhận được

$$D_{x'}^{\alpha'} D_t^j u(x'_0, t^0) = D_{x'}^{\alpha'} u_j(x'_0), j = 0, 1, \qquad (1.16)$$

với bất kì α'. Từ (1.15) ta có với bất kì $\beta' = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$:

$$D_{x'}^{\beta'} D_t^2 u(x'_0, t^0) \equiv D_{x'}^{\beta'} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x'_0, t^0)$$

$$= (\sum_{i,j=1}^{n-1} D_{x'}^{\beta'}[b_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}])|_{x=x^0}$$

$$+(\sum_{i=1}^{n} D_{x'}^{\beta'}[b_{in}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}])|_{x=x^0} + (\sum_{i=1}^{n} D_{x'}^{\beta'}[b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}])|_{x=x^0}$$

$$+(D_{x'}^{\beta'}[b(x)u])|_{x=x^0} + D_{x'}^{\beta'} h(x^0). \tag{1.17}$$

Vế phải của đẳng thức (1.17) hoàn toàn được xác định nhờ (1.16). Do đó tại điểm (x'_0, t^0) các đạo hàm dạng $D_{x'}^{\beta'} D_t^2 u$ được xác định. Giả sử với một số k nào đó, $k \geq 2$, tại điểm x^0 xác định được tất cả các đạo hàm dạng

$$D_{x'}^{\beta'} D_t^j u, \quad j \leqslant k, \tag{1.18}$$

đối với bất kì đa chỉ số β'. Từ (1.15) nhờ phép lấy đạo hàm theo x' và theo t ta được:

$$D_{x'}^{\beta'} D_t^{k+1} u(x'_0, t^0) = (\sum_{i,j=1}^{n-1} D_{x'}^{\beta'} D_t^{k-1}[b_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}])|_{x=x^0} +$$

$$+(\sum_{i=1}^{n-1} D_{x'}^{\beta'} D_t^{k-1}[b_{in}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}])|_{x=x^0} + (\sum_{i=1}^{n} D_{x'}^{\beta'} D_t^{k-1}[b_i(x)\frac{\partial u}{\partial t}])|_{x=x^0}$$

$$+(D_{x'}^{\beta'} D_t^{k-1}[b(x)u])|_{x=x^0} + D_{x'}^{\beta'} D_t^{k-1} h(x^0). \tag{1.19}$$

Từ (1.17), (1.19) và giả thiết quy nạp (1.18) rút ra các hệ số

$$C_{\alpha',k+1} = \sum_{|\beta'| \leqslant |\alpha'|+1} c_{\beta',k} C_{\beta',k} + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{|\beta'| \leqslant |\alpha'|+2} c_{\beta',j} C_{\beta',j} + h_{\alpha',k+1} \tag{1.20}$$

được xác định duy nhất qua $u_0(x^0)$ và $u_1(x^0)$, ở đây $c_{\beta',j}$ là tổ hợp tuyến tính với các hệ số không âm của các đạo hàm các hệ số của phương trình (1.15) tại điểm x^0. Như vậy, các hệ số C_α với α bất kì được xác định duy nhất. Tính duy nhất nghiệm của bài toán (1.15), (1.14) được chứng minh.

Chứng minh sự tồn tại nghiệm của định lí được trình bày ở §4 của phần phụ lục cuối cuốn sách.

2. Bài toán Cauchy tổng quát. Khái niệm về đặc trưng

Giả sử trong miền Ω cho một mặt $(n-1)$ chiều đủ trơn S và tại mỗi điểm của mặt cho một đường cong ℓ nào đó không tiếp xúc với mặt S, biến thiên đủ trơn trên mặt S[1].

Bài toán tìm nghiệm của phương trình (1.12) trong một lân cận nào đó của mặt S sao cho

$$u|_S = u_0(x), \tag{1.21}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \ell}|_S = u_1(x), \tag{1.22}$$

ở đó u_0, u_1 là các hàm đã được cho trên mặt S, được gọi là *bài toán Cauchy tổng quát* đối với phương trình (1.12). Các hàm u_0, u_1 được gọi là các *dữ kiện Cauchy*, còn mặt S được gọi là *mặt Cauchy*.

Ta tìm cách đưa bài toán Cauchy tổng quát về bài toán Cauchy ở mục trước nhờ việc làm chi tiết một số giả thiết của mặt S và các đường cong ℓ. Giả sử trên mặt S có thể đưa vào các tham số

[1] Chẳng hạn ℓ được lấy là pháp tuyến của mặt.

$\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ sao cho

$$x_i = x_i(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}), \qquad (i = 1, \dots, n), \tag{1.23}$$

ở đây hạng của ma trận hàm $\|\partial x_i / \partial \xi_k\|$, $(i = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, n-1)$ bằng $(n-1)$ tại mỗi điểm của mặt S và vế phải của (1.23) là các hàm đủ trơn. Ngoài ra, giả sử các đường cong ℓ được cho bởi các phương trình tham số:

$$x_i = X_i(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n), \qquad (i = 1, \dots, n), \tag{1.24}$$

ξ_n là tham số của điểm chạy trên đường cong ℓ và $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ là các tham số của giao điểm đường cong ℓ với mặt S, còn vế phải của (1.24) là các hàm đủ trơn.

Ta giả thiết có ít nhất một đạo hàm $\partial X_i / \partial \xi_n \neq 0$ và giá trị $\xi_n = 0$ tương ứng với giao điểm của ℓ với S.

Xét định thức hàm

$$D(\xi_1, \dots, \xi_n) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X_1}{\partial \xi_1} & \dots & \dfrac{\partial X_n}{\partial \xi_1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial \xi_n} & \dots & \dfrac{\partial X_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}. \tag{1.25}$$

Trên mặt S $(\xi_n = 0)$ các phương trình (1.24) trùng với các phương trình (1.23). Do vậy, từ (1.25) ta nhận được

$$D(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \xi_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \xi_2} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial \xi_n} & \ldots & \dfrac{\partial X_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}. \tag{1.26}$$

Bởi vì hạng của $\|\partial x_i/\partial \xi_k\|(i = 1,\ldots,n; k = 1,\ldots,n-1)$ bằng $(n-1)$, nên $(n-1)$ dòng đầu của định thức (1.26) độc lập tuyến tính. Mặt khác, các đường cong ℓ không tiếp xúc với mặt S, tức là dòng cuối cùng của định thức (1.26) không thể là một tổ hợp tuyến tính của các dòng còn lại. Do đó, $D(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},0) \neq 0$. Do tính liên tục của định thức (1.25), nên tồn tại một số dương ε để $D(\xi_1,\ldots,\xi_n) \neq 0$ với mọi $\xi_n, |\xi_n| < \varepsilon$. Do vậy, tồn tại một lân cận của mặt S sao cho trong lân cận này định thức (1.25) khác không.

Từ các lí luận trên suy ra: Có thể lấy $\xi_1,\ldots,\xi_n$ làm toạ độ mới của điểm $(x_1,\ldots,x_n)$ trong một lân cận nào đó của mặt S, tức là

$$\xi_i = \xi_i(x_1,\ldots,x_n), i = 1,\ldots,n. \tag{1.27}$$

Khi đó mặt S có phương trình $\xi_n = 0$, còn các đường ℓ trùng với các đường toạ độ $\xi_i = c_i, i = 1,\ldots,n-1$.

Bây giờ ta đưa biến mới $\xi_1,\ldots,\xi_n$ vào phương trình (1.12). Kí hiệu $v(\xi) = u(x(\xi)), \xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n), x = (x_1,\ldots,x_n)$, ta nhận được

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_p \frac{\partial v}{\partial \xi_p}\frac{\partial \xi_p}{\partial x_i}, i = 1,\ldots,n,$$

và

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{p,q=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_p \partial \xi_q} \frac{\partial \xi_p}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_j} + \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial \xi_p} \frac{\partial^2 \xi_p}{\partial x_i \partial x_j}, i, j = 1, \ldots, n.$$

Do vậy, phương trình (1.12) trong các biến mới có dạng

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(\xi) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\xi) \frac{\partial v}{\partial \xi_i} + b(\xi) v = f_1(\xi), \qquad (1.12')$$

ở đó

$$b_{ij}(\xi) = \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq}(x(\xi)) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_p} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_q}, i, j = 1, \ldots, n.$$

Đặc biệt,

$$b_{nn}(\xi(x)) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j}.$$

Nếu trên mặt S hàm

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \neq 0, \qquad (1.28)$$

thì $b_{nn}(\xi(x))$ khác không trong một lận cận nào đó của mặt S. Khi đó trong lân cận này phương trình $(1.12')$ được viết dưới dạng:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_n^2} = \sum_{i,j=1}^{n-1} c_{ij}(\xi) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \sum_{i=1}^{n-1} c_{in}(\xi) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_i \partial \xi_n}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} c_i(\xi) \frac{\partial v}{\partial \xi_i} + c(\xi) v + h(\xi). \qquad (1.29)$$

Ta có

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\ell, x_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \cos(\ell, x_i)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial \xi_j} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \cos(\ell, x_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial \ell}.$$

Bởi vậy, (1.21) và (1.22) trong hệ tọa độ mới có dạng

$$v|_{\xi_n=0} = v_0(\xi'), \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}), \tag{1.21'}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial \ell}|_{\xi_n=0} = v_1(\xi'), \quad \xi' = (\xi_1, ..., \xi_{n-1}). \tag{1.22'}$$

Bởi vì đường cong ℓ không tiếp xúc với mặt S, nên

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial \ell}\Big|_S \neq 0. \tag{1.30}$$

Do đó, từ (1.21′) và (1.22′) ta nhận được

$$\frac{\partial v}{\partial \xi_n}|_{\xi_n=0} = v_2(\xi'), \tag{1.31}$$

ở đó

$$v_2(\xi') = \frac{1}{\frac{\partial \xi_n}{\partial \ell}}(v_1(\xi') - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial v_0}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial \ell}).$$

Như vậy, bài toán Cauchy tổng quát được đưa về bài toán Cauchy (1.29), (1.21′), (1.31) nếu điều kiện (1.28) được thực hiện.

Bây giờ ta đưa ra một số khái niệm có liên quan đến điều kiện (1.28). Với các biến thực $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ phương trình

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \alpha_i \alpha_j = 0$$

được gọi là *phương trình đặc trưng* của phương trình (1.12).

Điểm x của mặt $\omega(x_1, \dots, x_n) = 0$ (ω là hàm thực) được gọi là *điểm đặc trưng* đối với phương trình (1.12) nếu tại điểm này xảy ra

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = 0 \tag{1.32}$$

và có ít nhất một trong các đạo hàm $\partial\omega/\partial x_i, i = 1, .., n$, khác không. Mặt $\omega(x_1, \dots, x_n) = 0$ được gọi là *mặt đặc trưng* (đường đặc trưng nếu $n = 2$) đối với phương trình (1.12) nếu tất cả các điểm của nó là điểm đặc trưng.

Điều kiện (1.28) có nghĩa là mặt S không có các điểm đặc trưng. Như vậy nếu mặt S không có các điểm đặc trưng thì bài toán Cauchy tổng quát đưa được về bài toán Cauchy đã xét ở mục trước.

Để bài toán Cauchy $(1.29), (1.21'), (1.31)$ thỏa mãn các đòi hỏi của định lí Kovalepskaia cần bổ sung một số điều kiện sau:

a) Các hệ số và vế phải của phương trình (1.12) là các hàm giải tích của các biến $x = (x_1, \dots, x_n)$.

b) Các hàm trong biểu diễn (1.24) là các hàm giải tích theo các đối số của chúng.

c) Các dữ kiện Cauchy là các hàm giải tích của $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

d) Mặt S được cho bởi phương trình $\omega(x_1, \dots, x_n) = 0$ với ω là hàm giải tích theo các đối số của nó và mặt S không có các điểm mà tại đó tất cả các đạo hàm bậc nhất của hàm ω bị triệt tiêu.

Theo định lí Kovalepskaia bài toán Cauchy tổng quát có nghiệm duy nhất trong một lân cận nào đó của mặt S nếu thực hiện được các điều kiện a), b), c), d) và mặt này không có các điểm đặc trưng.

Nếu mặt S có điểm đặc trưng đối với phương trình (1.12), chẳng hạn điểm đó là x^0, thì $b_{nn}(\xi(x^0)) = 0$. Khi đó đẳng thức (1.12′) tại $\xi^0 = \xi(x^0)$ là một hệ thức liên hệ các đại lượng $v(\xi^0)$ và các đạo hàm cấp hai của nó. Do đó, tại x^0 giá trị của các hàm u_0, u_1 và các đạo hàm của chúng được liên hệ với nhau bởi một hệ thức nào đó.

Từ những lí luận trên rút ra rằng, nếu mặt S có điểm đặc trưng đối với phương trình (1.12), thì bài toán Cauchy tổng quát (1.12), (1.21), (1.22) có thể không có nghiệm (thậm chí các dữ kiện đã cho là các hàm giải tích) hoặc nghiệm không duy nhất nếu các hàm u_0 và u_1 được cho tùy ý.

Trước khi kết thúc mục này ta xét một số ví dụ làm sáng tỏ khái niệm mặt đặc trưng đối với phương trình (1.12).

Ví dụ 1.

Đối với phương trình Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0,$$

phương trình (1.32) có dạng

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_n}\right)^2 = 0.$$

Do vậy, phương trình Laplace không có mặt đặc trưng thực.

Ví dụ 2.

Xét phương trình truyền nhiệt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2}.$$

Đối với phương trình này (1.32) có dạng

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_{n-1}}\right)^2 = 0.$$

Đương nhiên, một nghiệm bất kì của phương trình này có dạng $\omega = \varphi(t)$, ở đó $\varphi(t)$ là hàm khả vi liên tục tùy ý ($\varphi' \neq 0$). Bởi vậy, các mặt phẳng $t = \text{const}$ là các mặt đặc trưng đối với phương trình truyền nhiệt.

Ví dụ 3.

Trong trường hợp phương trình truyền sóng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2},$$

phương trình (1.32) có dạng

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_{n-1}}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 = 0.$$

Do vậy, mặt phẳng

$$a_1(x_1 - x_1^0) + \ldots + a_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-1}^0) + a_n(t - t^0) = 0$$

và mặt nón $(x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_{n-1}^0)^2 = (t - t^0)^2$ là các mặt đặc trưng của phương trình truyền sóng, ở đây $a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2 = a_n^2$, còn $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, t^0)$ là một điểm tùy ý trong R^n.

§3. Đưa về dạng chính tắc tại một điểm và phân loại phương trình tuyến tính cấp hai

Xét trong miền $\Omega \subset R^n$ phương trình tuyến tính cấp hai

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u = f(x), \qquad (3.1)$$

các hệ số $a_{ij}, i, j = 1, \ldots, n$ là các hàm thực. Ta có thể coi $a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, \ldots, n$. Thật vậy, nếu $u \in C^2(\Omega)$, thì

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Do đó,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \text{với } a'_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}),$$

$i, j = 1, \ldots, n$.

Giả sử x^0 là một điểm tùy ý thuộc Ω và $\lambda_1(x^0), \ldots, \lambda_n(x^0)$ là các nghiệm thực của $\det \|a_{ij}(x^0) - \lambda(x^0)\delta_{ij}\|_{i,j=1}^n = 0$. Kí hiệu $n_+ = n_+(x^0), n_- = n_-(x^0), n_0 = n_0(x^0)$ tương ứng là số các giá trị dương, âm, bằng 0 của $\lambda_i(x^0), i = 1, \ldots, n$. Khi đó $n_+ + n_- + n_0 = n$.

Xét phép biến đổi đơn trị

$$\xi_i = \xi_i(x_1, \ldots, x_n), i = 1, \ldots, n, \tag{3.2}$$

biến lân cận U nào đó của điểm $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ thành lân cận V của điểm $\xi^0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0), \xi_i^0 = \xi_i(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, $i = 1, \ldots, n$. Kí hiệu $x_i = x_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $i = 1, \ldots, n$, là phép biến đổi ngược của phép biến đổi (3.2). Giả sử $\xi_i(x) \in C^2(\overline{U}), i = 1, \ldots, n$, và phép biến đổi (3.2) là không suy biến, tức là

$$\det \| \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \|_{i,j=1}^n \neq 0. \tag{3.3}$$

Bởi vì

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial \xi_p} \frac{\partial \xi_p}{\partial x_i},$$