Nguyễn Mạnh Hùng

PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG TUYẾN TÍNH

Nhà xuất bản Đại học Sư phạm

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn giáo trình "Phương trình đạo hàm riêng tuyến tính" được viết dựa trên các bài giảng của tác giả cho hệ đào tạo Sau đại học trong một số năm tại khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội. Mục đích của cuốn sách là trang bị cho người học những kiến thức cơ bản của Phương trình đạo hàm riêng hiện đại. Do vậy, cuốn sách được viết thành bốn chương và một phần phụ lục. Cuối mỗi chương đều có một hệ thống bài tập nhằm giúp người học củng cố và khắc sâu phần lý thuyết của chương.

Chương I giúp người học nắm được các khái niệm cơ bản nhất để có thể tiếp cận với phương pháp nghiên cứu ba loại phương trình "Elliptic, Parabolic và Hyperbolic" theo quan điểm hiện đại [1, 2, 5, 7-9, 18, 19, 29, 43, 61, 76-78, 80, 95]. Một trong những khái niệm cơ bản của phương trình đạo hàm riêng hiện đại là nghiệm suy rộng, tức là nghiệm "thô" lúc đầu và là nghiệm "khá gần" với nghiệm hầu khắp hoặc nghiệm cổ điển. Sau đó, nhờ các công cụ của giải tích hàm, ta làm cho nghiệm suy rộng dần đến được nghiệm thông thường. Với mục đích đó, các chương II, III và IV được trình bày trước hết là sự tồn tại và duy nhất nghiệm suy rộng của các bài toán biên và bài toán Cauchy. Tiếp theo là xét xem khi nào nghiệm suy rộng trở thành nghiệm thông thường, tức đi nghiên cứu tính trơn của nghiệm suy rộng [10, 21, 29-33, 46-49, 59, 60, 63, 93, 94]. Tuy nhiên, vấn đề này đến nay vẫn chưa được giải quyết trọn vẹn. Vấn đề về tính trơn của nghiệm suy rộng mới chỉ được giải quyết cơ bản cho các bài toán của phương trình đạo hàm riêng trong miền với biên trơn và bài toán Elliptic trong miền với biên tùy ý [44, 48, 50-59], còn các bài toán biên đối với phương trình Parabolic hay Hyperbolic trong các miền trụ mà đáy là miền với biên không trơn vẫn còn là vấn đề thách thức các nhà toán học hiện nay. Phần phụ lục nhằm giúp người học nhìn khái quát về ba loại phương trình đạo hàm riêng, ở đó chúng tôi trình bày các kết quả nổi tiếng về bài toán Elliptic với tham biến trong miền với biên trơn [45] và bài toán Elliptic trong miền với điểm góc [11-17, 34, 35, 37, 38, 64-74, 81, 84, 91, 92]. Ngoài ra, chúng tôi cũng giới thiệu phương trình Parabolic theo Petrovsky và trình bày một số kết quả, cũng như các hướng nghiên cứu các bài toán biên đối với hệ không dừng trong miền trụ với đáy là miền không trơn [3, 4, 6, 22-28, 36, 39-42, 62, 75, 79, 82, 83, 85-90].

Cuốn sách này được viết nhằm phục vụ chủ yếu cho hệ đào tạo Thạc sĩ của khoa Toán-Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội. Tuy nhiên, nó có thể dùng làm giáo trình chuyên đề cho sinh viên năm cuối thuộc chuyên ngành Toán của các trường đại học hoặc các độc giả muốn tìm hiểu về phương trình đạo hàm riêng hiện đại. Đặc biệt, cuốn sách có thể được xem như một tài liệu chuyên khảo về các bài toán dừng và không dừng trong các miền với biên không trơn.

Cuốn sách được viết không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả mong nhận được các ý kiến đóng góp của các nhà Toán học, các bạn đồng nghiệp và các độc giả gần xa. Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ: "Seminar phương trình đạo hàm riêng, bộ môn Giải tích, khoa Toán-Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội". Tác giả xin chân thành cảm ơn.

Tác giả

Nguyễn Mạnh Hùng

DANH MỤC KÍ HIỆU

Trong toàn bộ cuốn sách, trừ các trường hợp đặc biệt được nói rõ ở mỗi mục, còn lại sử dụng các kí hiệu sau:

• $\mathbb{R}^n$ là không gian Euclide $n-$chiều, $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Cho hai điểm $x, y \in \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_n)$, tích vô hướng được xác định bởi công thức

$$xy = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

và khoảng cách giữa chúng được xác định bởi công thức

$$|x - y| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

• Ω là một miền trong $\mathbb{R}^n$, tức là một tập mở liên thông, với biên $\partial\Omega$. $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Nếu $\Omega' \subset \Omega$ sao cho $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, thì ta viết $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Giả sử $0 < T < \infty$. Kí hiệu $Q_T = \Omega \times (0, T) = \{(x, t) : x \in \Omega,\ t \in (0, T)\}$ là trụ trong $\mathbb{R}^{n+1}$. Mặt xung quanh của nó là $S_T = \partial\Omega \times (0, T) = \{(x, t) :\ x \in \partial\Omega,\ t \in (0, T)\}$.

• $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ là kí hiệu đa chỉ số với α_i là các số nguyên không âm, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Giả sử $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Khi đó $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_n}$. Đạo hàm (suy rộng) cấp α được kí hiệu là

$$D^\alpha = D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}} \equiv \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}.$$

Đặc biệt,

$$\nabla = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\Big).$$

Trường hợp $(x, t) \in Q_T$, để chỉ đạo hàm (suy rộng) cấp k theo biến t ta viết

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \equiv \partial^k/\partial t^k \equiv u_{t^k}.$$

- Giá của một hàm là bao đóng của tập hợp tất cả các điểm mà hàm đó khác không và kí hiệu là supp. Kí hiệu $C^k(\Omega)$ là tập hợp tất cả các hàm có các đạo hàm liên tục đến cấp k trong miền Ω, $0 \leqslant k \leqslant \infty$, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$, và $\overset{\circ}{C}{}^k(\Omega) = \overset{\circ}{C}(\Omega) \cap C^k(\Omega)$, ở đó $\overset{\circ}{C}(\Omega)$ là tập hợp tất cả các hàm liên tục trong Ω và có giá compact thuộc Ω.
- $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, là không gian bao gồm tất cả các hàm $u(x)$ khả tổng cấp p theo Lebesgue trong Ω với chuẩn

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \Big(\int\limits_\Omega |u|^p dx\Big)^{1/p}.$$

- $L_\infty(\Omega)$ là không gian bao gồm tất cả các hàm $u(x)$ đo được theo Lebesgue và bị chặn hầu khắp trên Ω với chuẩn

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)|.$$

- $L_{2,1}(Q_T)$ là không gian với chuẩn

$$\|u\|_{L_{2,1}(Q_T)} = \Big(\int\limits_0^T \|u\|_{L_2(\Omega)} dt\Big)^{1/2}.$$

- $W_2^m(\Omega)$ là không gian bao gồm tất cả các hàm $u(x) \in L_2(\Omega)$, sao cho $D^\alpha u(x) \in L_2(\Omega)$ với mọi $|\alpha| \leqslant m$ và có chuẩn được xác định bởi công thức

$$\|u\|_{W_2^m(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|=0}^{m} \int\limits_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx \Big)^{1/2}.$$

- $\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ là bao đóng của $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$ trong chuẩn của $W_2^m(\Omega)$.
- $W_2^{m,l}(Q_T)$ là không gian bao gồm tất cả các hàm $u(x,t) \in L_2(Q_T)$, sao cho tồn tại các đạo hàm suy rộng theo x đến cấp m thuộc $L_2(Q_T)$ và theo t đến cấp l thuộc $L_2(Q_T)$ với chuẩn sau:

$$\|u\|_{W_2^{m,l}(Q_T)} = \Big(\sum_{|\alpha|=0}^{m} \int\limits_{Q_T} |D^\alpha u|^2 dxdt + \sum_{k=1}^{l} \int\limits_{Q_T} \Big|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big|^2 dxdt \Big)^{1/2}.$$

- $\overset{\circ}{W}{}_2^{m,l}(Q_T)$ là bao đóng trong không gian $W_2^{m,l}(Q_T)$ của tập hợp tất cả các hàm $u(x,t)$ thuộc $C^\infty(Q_T)$ sao cho $u(x,t) = 0$ khi $(x,t) \in Q_T^\delta = \{(x,t) \in Q_T : \ dist\{(x,t), S_T\} < \delta\}$, δ là số dương đủ bé.

Kí hiệu $r = |x|$ là khoảng cách từ điểm x đến gốc tọa độ. Ta có các không gian hàm sau:

- $W_{2,\beta}^{m,l}(Q_T)$ là không gian với chuẩn được xác định bởi

$$\|u\|^2_{W_{2,\beta}^{m,l}(Q_T)} = \sum_{|\alpha|=0}^{m} \int\limits_{Q_T} r^{2(\beta+|\alpha|-m)} |D^\alpha u|^2 dxdt + \sum_{k=0}^{l} \int\limits_{Q_T} \Big|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big|^2 dxdt.$$

- $W_{2,\beta}^m(Q_T)$ là không gian với chuẩn

$$\|u\|_{W_{2,\beta}^m(Q_T)} = \Big(\sum_{|\alpha|+k=0}^{m} \int\limits_{Q_T} r^{2(\beta+|\alpha|+k-m)} \Big| D^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big|^2 dxdt \Big)^{1/2}.$$

• $V_2(Q_T)$ là không gian bao gồm các hàm $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ với chuẩn

$$|u|_{Q_T} = \text{ess} \sup_{0<t<T} \|u(x,t)\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L_2(Q_T)}.$$

• $V_2^{1,0}(Q_T)$ là không gian bao gồm các hàm $u(x,t) \in V_2(Q_T)$, sao cho

$$\|u(x,t+\Delta t) - u(x,t)\|_{L_2(\Omega)} \longrightarrow 0,\ \Delta t \to 0,$$

và đều với $t \in (0,T)$.

• $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_T) = V_2^{1,0}(Q_T) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$.

• $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ là không gian làm đầy của $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ trong chuẩn

$$\|u\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)} = \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\widetilde{u}(\xi)|^2 d\xi\Bigg)^{1/2}, \quad s \in \mathbb{R}^1,$$

ở đó $\widetilde{u}(\xi)$ là phép biến đổi Fourier của hàm $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

• $W_2^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \equiv H_2^{s-1/2}(\mathbb{R}^n)$ là không gian vết của các hàm thuộc $W_2^s(\mathbb{R}^n)$ trên một mặt phẳng $x_n = t$ nào đó.

Kí hiệu I là một khoảng bất kì trên $\mathbb{R}^1$, có thể hữu hạn hoặc vô hạn. Giả sử α là phân số dương, $[\alpha]$ là kí hiệu phần nguyên của α. Ta có các không gian hàm sau:

• $H_2^{\alpha}(I)$ là không gian làm đầy của tập tất cả các hàm khả vi vô hạn trên $\mathbb{R}^1$ được thu hẹp trên I theo chuẩn

$$\|u\|_{H_2^{\alpha}(I)} = \Big(\sum_{k=0}^{[\alpha]} \int\limits_I \Big|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big|^2 dt + \int\limits_I \int\limits_I \frac{|\partial^{[\alpha]} u(t)/\partial t^{[\alpha]} - \partial^{[\alpha]} u(\theta)/\partial t^{[\alpha]}|^2}{|t-\theta|^{2\alpha - 2[\alpha]+1}} d\theta dt\Big)^{1/2}.$$

- $H_2^{l,\alpha}(Q_I)$, l là số nguyên không âm, $Q_I = \Omega \times I$ là không gian bao gồm tất cả các hàm $u(x,t) \in H_2^{\alpha}(I)$ với hầu khắp $x \in \Omega$ và $u(x,t) \in W_2^l(\Omega)$ với hầu khắp $t \in I$. Chuẩn trong không gian này được cho bởi công thức

$$\|u\|_{H_2^{l,\alpha}(Q_I)} = \Big(\int\limits_I \|u\|^2_{W_2^l(\Omega)} dt + \int\limits_\Omega \|u\|^2_{H_2^\alpha(I)} dx \Big)^{1/2}.$$

- $H_2^{l,\alpha}(S_I)$, l là số nguyên không âm, $S_I = \partial\Omega \times I$, là không gian vết của các hàm $u(x,t) \in H_2^{l,\alpha}(Q_I)$ với chuẩn

$$\|u\|_{H_2^{l,\alpha}(S_I)} = \Big(\int\limits_I \|u\|^2_{W_2^l(\partial\Omega)} dt + \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^N \|\varphi_j u\|^2_{H_2^\alpha(I)} ds \Big)^{1/2},$$

ở đây $1 = \sum\limits_{j=1}^N \varphi_j$ là phân hoạch đơn vị.

Chương I
KHÔNG GIAN SOBOLEV

§1. Không gian Sobolev

1.1. Trung bình hóa

Giả sử $\theta(x)$ là một hàm không âm thuộc $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ sao cho $\theta(x) = \theta(-x)$, $\theta(x) = 0$ nếu $|x| > 1$ và $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \theta(x) = 1$. Hàm $\theta(x)$ được gọi là *nhân trung bình hóa*. Để chỉ ra ví dụ, ta có thể lấy hàm sau:

$$\theta(x) = \begin{cases} C \exp\Big(- \frac{1}{1-|x|^2}\Big), & |x| < 1, \\ \theta(x) = 0, & |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

với hằng số C được chọn thích hợp.

Nếu hàm $u \in L_p(\Omega),\ p \geqslant 1$, thì hàm

$$u_h(x) = h^{-n} \int\limits_{\Omega} \theta\Big(\frac{x-y}{h}\Big) u(y) dy$$

được xác định trong $\mathbb{R}^n$ và trơn vô hạn. Nó được gọi là *trung bình hóa* hay *hàm trung bình* của hàm u.

Định lí 1.1. *Giả sử hàm $u \in L_p(\Omega)$ với $p \geqslant 1$. Khi đó* $\lim\limits_{h \to 0} \|u_h - u\|_{L_p(\Omega)} = 0$.

Chứng minh. Đặt $u(x) = 0$ đối với $x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$. Khi đó,

$$u_h(x) = h^{-n} \int\limits_{\Omega} \theta(\frac{x-y}{h}) u(y) dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \theta(z) u(x+hz) dz.$$

Bởi vậy,

$$u_h(x) - u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \theta(z)[u(x+hz) - u(x)] dz,$$

$$|u_h(x) - u(x)|^p \leqslant C \int\limits_{|z|<1} |u(x+hz) - u(x)|^p dz.$$

Sau khi lấy tích phân bất đẳng thức này theo x và đổi thứ tự lấy tích phân nhờ Định lí Fubini ta nhận được

$$\int\limits_{\Omega} |u_h(x) - u(x)|^p dx \leqslant C \int\limits_{|z|<1} dz \int\limits_{\Omega} |u(x+hz) - u(x)|^p dx.$$

Do tính liên tục toàn cục (x. [19]) của hàm thuộc không gian $L_p(\Omega)$, $p \geqslant 1$, tích phân sau cùng dần đến không khi $h \to 0$. Định lí được chứng minh.

Định lí 1.2. *Nếu $f, g \in L_1(\Omega)$, thì*

$$\int\limits_{\Omega} f_h(x) g(x) dx = \int\limits_{\Omega} f(x) g_h(x) dx.$$

Chứng minh. Theo định nghĩa trung bình hóa, ta có

$$\int\limits_{\Omega} f_h(x) g(x) dx = h^{-n} \int\limits_{\Omega} \Big(\int\limits_{\Omega} \theta\Big(\frac{x-y}{h}\Big) f(y) dy \Big) g(x) dx$$

$$= h^{-n} \int\limits_{\Omega} f(y) dy \int\limits_{\Omega} \theta\Big(\frac{y-x}{h}\Big) g(x) dx = \int\limits_{\Omega} f(x) g_h(x) dx.$$

Định lí được chứng minh.

1.2. Đạo hàm suy rộng

Giả sử Ω là một miền trong không gian $\mathbb{R}^n$. Một hàm $v(x) \in L_1(\Omega)$ được gọi là *đạo hàm suy rộng* cấp α của hàm $u(x) \in L_1(\Omega)$ nếu

$$\int\limits_{\Omega} u(x)D^{\alpha}\psi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_{\Omega} v(x)\psi(x)dx$$

với mọi $\psi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega)$, ở đó $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Từ công thức Green cổ điển suy ra một hàm $v(x)$ có đạo hàm thông thường liên tục cấp α thì nó có đạo hàm suy rộng cấp α. Từ định nghĩa đạo hàm suy rộng rút ra hàm $v(x)$ có không quá một đạo hàm suy rộng.

Một hàm có đạo hàm suy rộng có thể không có đạo hàm theo nghĩa thông thường. Để làm ví dụ ta lấy $v(x) = |x|, x \in (-1, 1)$. Rễ kiểm tra được hàm $v(x)$ có đạo hàm suy rộng trong khoảng $(-1, 1)$. Tuy nhiên, hàm này không có đạo hàm thông thường tại điểm $x = 0$.

Một hàm có đạo hàm suy rộng cấp α trong miền Ω thì nó cũng có đạo hàm suy rộng cấp α trong miền $\Omega' \subset \Omega$. Thật vậy, Giả sử $u(x)$ có đạo hàm suy rộng trong miền Ω là hàm $v(x)$ và $\psi(x)$ là một hàm bất kì thuộc $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega')$, Ω' là miền con của Ω. Khi coi $\psi(x) = 0$ với $x \in \Omega \setminus \Omega'$ ta nhận được $\psi(x) \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega)$. Ta có hệ thức:

$$\int\limits_{\Omega'} u(x)D^{\alpha}\psi(x)dx = \int\limits_{\Omega} u(x)D^{\alpha}\psi(x)dx$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\int\limits_{\Omega} v(x)\psi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_{\Omega'} v(x)\psi(x)dx.$$

Từ đó ta nhận được $u(x)$ có đạo hàm suy rộng trong miền Ω' cũng chính là hàm $v(x)$. Đạo hàm suy rộng trong miền Ω' được gọi là *thu hẹp* của đạo hàm suy rộng trong Ω vào Ω'.

Có thể kiểm tra được rằng: $D^{\alpha+\beta}v = D^{\alpha}(D^{\beta}v)$, $aD^{\alpha}v_1 + bD^{\alpha}v_2 = D^{\alpha}(av_1 + bv_2)$, ở đó a và b là các hằng số tùy ý.

Từ định nghĩa của đạo hàm suy rộng thấy ngay được đạo hàm suy rộng không phụ thuộc vào thứ tự lấy đạo hàm. Nói chung, đạo hàm suy rộng bảo toàn được nhiều tính chất của đạo hàm theo nghĩa thông thường. Tuy nhiên không phải tất cả, chẳng hạn từ sự tồn tại đạo hàm suy rộng cấp α không suy ra được sự tồn tại đạo hàm suy rộng cấp nhỏ hơn α.

Ta đi xét một định lí về sự liên hệ giữa đạo hàm suy rộng và trung bình hóa.

Định lí 1.3. *Giả sử Ω là một miền trong không gian $\mathbb{R}^n$, Ω' là miền con của Ω, sao cho khoảng cách giữa Ω' và $\partial\Omega$ bằng $d > 0$. Khi đó, đối với $0 < h < d$ và $x \in \Omega'$, ta có*

$$(D^{\alpha}u)_h(x) = D^{\alpha}u_h(x).$$

Chứng minh. Do $0 < h < d$ và $x \in \Omega'$, còn hàm $\theta((x-y)/h) \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega)$ đối với $x \in \Omega'$, nên khi sử dụng định nghĩa đạo hàm suy rộng, ta nhận được

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}u_h(x) =& D^{\alpha}_x h^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \theta\Big(\frac{x-y}{h}\Big) u(y)dy \\
=& h^{-n} \int\limits_{\Omega} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}_y \theta\Big(\frac{x-y}{h}\Big) u(y)dy \\
=& h^{-n} \int\limits_{\Omega} \theta\Big(\frac{x-y}{h}\Big) D^{\alpha}_y u(y)dy = (D^{\alpha}u)_h(x).
\end{aligned}$$

Định lí được chứng minh.

Bây giờ ta đi xét trường hợp $n = 1$ và các mối liên hệ giữa đạo hàm suy rộng, đạo hàm thông thường và tính liên tục tuyệt đối của một hàm trên một khoảng hữu hạn (a, b). Ta nhớ lại rằng, một hàm $f(x)$ *liên tục tuyệt đối* trên khoảng (a, b) nếu tồn tại một hàm khả tổng $g(x)$ trên đoạn này, sao cho

$$f(x) = \int_a^x g(t)dt + \text{const},\ x \in (a, b).$$

Định lí sau đây nói lên mối liên hệ giữa tính liên tục tuyệt đối và đạo hàm theo nghĩa thông thường của một hàm. Chứng minh Định lí này có thể xem như bài tập.

Định lí 1.4. *Giả sử $f(x)$ liên tục tuyệt đối trên khoảng hữu hạn (a, b). Khi đó tồn tại đạo hàm thông thường $f'(x)$ hầu khắp trong (a, b). Hơn nữa, $f'(x)$ là hàm khả tổng trên (a, b) và*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$$

Định lí 1.5. *Nếu hàm $f(x)$ liên tục tuyệt đối trên một khoảng hữu hạn (a, b), thì nó có đạo hàm suy rộng trên khoảng này.*

Chứng minh. Giả sử $\psi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(a, b)$. Khi đó $f\psi$ cũng là hàm liên tục tuyệt đối trên khoảng (a, b). Theo Định lí 1.4 các hàm f

và $(f\psi)$ có đạo hàm thông thường hầu khắp trong (a,b) và

$$\int_a^b f'(t)\psi(t)dt = \int_a^b (f(t)\psi(t))'dt - \int_a^b f(t)\psi'(t)dt$$
$$= -\int_a^b f(t)\psi'(t)dt.$$

Do đó, $f'(x)$ là đạo hàm suy rộng của $f(x)$ trong (a,b). Định lí được chứng minh.

Các điều khẳng định ngược lại được xét trong định lí sau.

Định lí 1.6. *Giả sử $f(x)$ có đạo hàm suy rộng trên khoảng hữu hạn (a,b). Khi đó $f(x)$ là hàm liên tục tuyệt đối trên khoảng (a,b) và hầu khắp trong khoảng (a,b) nó có đạo hàm theo nghĩa thông thường $f'(x)$.*

Chứng minh. Giả sử f có đạo hàm suy rộng là f_1 trong khoảng (a,b). Khi đó $f_1 \in L_1(a,b)$. Giả sử $g \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(a,b)$ và $\int_a^b g(t)dt = 1$. Đặt

$$\varphi(x) = f(x) - \int_a^x f_1(t)dt + C,$$

ở đó C là hằng số được chọn sao cho:

$$\int_a^b \varphi(t)g(t)dt = 0.$$

Khi đó với mỗi $\psi(x) \in \overset{\circ}{C}^{\infty}(a,b)$ ta có

$$\int_a^b \varphi(t)\psi'(t)dt = \int_a^b f(t)\psi'(t)dt - \int_a^b \int_a^x f_1(t)dt\psi'(x)dx$$
$$= \int_a^b f(t)\psi'(t)dt + \int_a^b f_1(t)\psi(t)dt = 0.$$

Đặt $\theta(x) = \psi(x) - g(x)\int_a^b \psi(t)dt$. Ta có $\theta(x) \in \overset{\circ}{C}^{\infty}(a,b)$ và $\int_a^b \theta(t)dt = 0$. Ta nhận được

$$\theta_1(x) = \int_a^x \theta(t)dt \in \overset{\circ}{C}^{\infty}(a,b),$$

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = \int_a^b \varphi(x)\theta(x)dx = \int_a^b \varphi(x)\theta_1'(x)dx = 0$$

với mọi, $\psi(x) \in \overset{\circ}{C}^{\infty}(a,b)$. Do đó $\varphi(x) \equiv 0$ và $f(x) = \int_a^x f_1(t)dt - C$, ở đây $C = \text{const}$, tức là f là hàm liên tục tuyệt đối và $f'(x) = f_1(x)$ hầu khắp trong (a,b). Định lí được chứng minh.

1.3. Không gian $W_p^m(\Omega), 1 \leqslant p < \infty$

Không gian $W_p^m(\Omega)$ là không gian bao gồm tất cả các hàm $u(x) \in L_p(\Omega)$, sao cho tồn tại các đạo hàm suy rộng mọi cấp $\alpha, |\alpha| \leqslant m$, thuộc $L_p(\Omega)$ và được trang bị chuẩn

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \Big)^{1/p}. \qquad (1.1)$$

Định lí 1.7. *Giả sử* Ω *là một miền trong* $\mathbb{R}^n$ *và* $m \geqslant 0$, $1 \leqslant p < \infty$. *Khi đó* $W_p^m(\Omega)$ *là một không gian Banach.*

Chứng minh. Dễ kiểm tra được $W_p^m(\Omega)$ là một không gian tuyến tính định chuẩn với chuẩn (1.1). Bây giờ ta chứng minh nó là không gian đầy. Giả sử $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ là dãy Cauchy trong $W_p^m(\Omega)$, tức là với mỗi số tự nhiên k:

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} \int\limits_{\Omega} |D^\alpha(u_j - u_{j+k})|^p dx \to 0, j \to \infty.$$

Đối với mỗi α dãy $\{D^\alpha u_j\}_{j=1}^{\infty}$ là dãy Cauchy trong $L_p(\Omega)$. Bởi vì $L_p(\Omega)$ là không gian đầy, nên tồn tại một hàm $u_\alpha \in L_p(\Omega)$ sao cho

$$\int\limits_{\Omega} |D^\alpha u_j - u_\alpha|^p dx \to 0, j \to \infty. \tag{1.2}$$

Đặc biệt $u_0 \in L_p(\Omega)$, tức là

$$\int\limits_{\Omega} |u_j - u_0|^p dx \to 0, j \to \infty. \tag{1.3}$$

Theo định nghĩa đạo hàm suy rộng cấp α, ta có hệ thức

$$\int\limits_{\Omega} u_j D^\alpha \psi dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} D^\alpha u_j \psi dx, \forall \psi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega). \tag{1.4}$$

Từ (1.2) và (1.3) suy ra có thể chuyển qua giới hạn đẳng thức (1.4) khi $j \to \infty$. Kết quả ta nhận được

$$\int\limits_{\Omega} u_0 D^\alpha \psi dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} u_\alpha \psi dx, \forall \psi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega).$$

Điều đó chứng tỏ rằng, u_α là đạo hàm suy rộng cấp α của hàm u_0 trong miền Ω và

$$\|u_j - u_0\|_{W_p^m(\Omega)} \to 0, j \to \infty.$$

Định lí được chứng minh.

Ta xét vấn đề xấp xỉ một hàm thuộc không gian $W_p^m(\Omega)$ bằng các hàm thuộc $C^\infty(\Omega)$.

Định lí 1.8. *Giả sử Ω là một miền thuộc $\mathbb{R}^n$ và Ω' là miền con của Ω sao cho $\Omega' \subset\subset \Omega$. Nếu $u \in W_p^m(\Omega)$, thì*

$$\lim_{h\to 0} \|u_h - u\|_{W_p^m(\Omega')} = 0.$$

Chứng minh. Do Định lí 1.3, ta có

$$\begin{aligned} \|u_h - u\|_{W_p^m(\Omega')} &= \Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m} \int_{\Omega'} |D^\alpha(u_h - u)|^p dx \Big)^{1/p} \\ &= \Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m} \int_{\Omega'} |(D^\alpha u)_h - D^\alpha u|^p dx \Big)^{1/p}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Đặt $v_\alpha = D^\alpha u$. Từ Định lí 1.1 ta nhận được

$$\int_{\Omega'} |(v_\alpha)_h - v_\alpha|^p dx \to 0, \quad h \to 0. \tag{1.6}$$

Từ đây và (1.5) nhận được

$$\|u_h - u\|_{W_p^m(\Omega')} \to 0, h \to 0.$$

Định lí được chứng minh.

Một miền Ω thuộc $\mathbb{R}^n$ được gọi là *miền sao* đối với điểm x_0, nếu với mỗi điểm $x \in \Omega$, đoạn thẳng nối x_0 với x cũng thuộc miền Ω. Trường hợp đặc biệt, miền lồi là miền sao đối với mọi điểm thuộc miền đó.

Định lí 1.9. *Nếu Ω là miền sao trong $\mathbb{R}^n$, thì không gian $C^\infty(\bar{\Omega})$ trù mật trong $W_p^m(\Omega)$.*

Chứng minh. Giả sử Ω là miền sao trong $\mathbb{R}^n$ đối với gốc tọa độ. Nếu $u \in W_p^m(\Omega)$, thì hàm $u(\lambda x)$ được xác định trong $\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda x \in \Omega\}$ và $u(\lambda x) \in W_p^m(\Omega_1)$, ở đó $\lambda = \text{const} < 1$. Hơn nữa, với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại một số $\delta(\varepsilon)$ sao cho

$$\|u(\lambda x) - u(x)\|_{W_p^m(\Omega)} \leqslant \varepsilon, \quad |\lambda - 1| < \delta(\varepsilon).$$

Mặt khác, từ Định lí 1.8 ta có

$$\lim_{h\to 0} \|u_h(\lambda x) - u(\lambda x)\|_{W_p^m(\Omega)} = 0.$$

Do đó,

$$\lim_{h\to 0} \|u_h(\lambda x) - u(x)\|_{W_p^m(\Omega)} \leqslant \varepsilon.$$

Bởi vì $u_h(\lambda x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$, nên $C^\infty(\bar{\Omega})$ trù mật trong $W_p^m(\Omega)$. Định lí được chứng minh.

Định lí 1.10. *Giả sử Ω là một miền lồi bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ và Ω_1 là tập con của $\bar{\Omega}$ có độ đo dương. Giả sử rằng $u \in W_p^1(\Omega), p > 1$. Khi đó*

$$\int_\Omega |u|^p dx \leqslant C \frac{\mu_n(\Omega)}{\mu_n(\Omega_1)} \int_{\Omega_1} |u|^p dx + C[d(\Omega)]^{n+p-1}[\mu_n(\Omega_1)]^{(1-n)/n} \int_\Omega |\nabla u|^p dx,$$

ở đó $d(\Omega)$ là đường kính của miền Ω, μ_n là độ đo Lebesgue n-chiều, C là hằng số không phụ thuộc vào hàm $u(x)$.

Chứng minh. Bởi vì Ω là miền lồi, nên Ω là miền sao. Do vậy, $C^\infty(\overline{\Omega})$ trù mật trong không gian $W_p^1(\Omega)$. Từ đó chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong Định lí đối với hàm $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Ta có

$$u(x) - u(y) = \int\limits_0^{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial \nu} dt,$$

ở đó $x,\ y$ là các điểm tùy ý trong $\Omega, \partial/\partial\nu$ là đạo hàm theo hướng $(x-y)/|x-y|$, còn dt là phần tử độ dài. Nhờ bất đẳng thức Hölder ta nhận được

$$|u(x)|^p \leqslant C|u(y)|^p + C|x-y|^{p-1} \int\limits_0^{l(x,y)} |\nabla u(y+t)|^p dt,$$

ở đó $l(x,y)$ là độ dài của đoạn nối điểm y và điểm giao của $\partial\Omega$ với tia xuất phát từ y và có phương là $(x-y)/|x-y|$. Tích phân bất đẳng thức này theo $x \in \Omega$. Kết quả là

$$\int\limits_\Omega |u(x)|^p dx \leqslant C\mu_n(\Omega)|u(y)|^p + Cd(\Omega)^{n+p-1} \int\limits_\Omega \frac{|\nabla u(z)|^p}{|z-y|^{n-1}} dz.$$

Bây giờ lấy tích phân theo $y \in \Omega_1$ bất đẳng thức nhận được, ta có

$$\begin{aligned}\mu_n(\Omega_1) \int\limits_\Omega |u(x)|^p dx \leqslant & C\mu_n(\Omega) \int\limits_{\Omega_1} |u(y)|^p dy \\ & + Cd(\Omega)^{n+p-1} \int\limits_\Omega |\nabla u(z)|^p dz \int\limits_{\Omega_1} \frac{dy}{|z-y|^{n-1}}.\end{aligned}$$

Mặt khác,

$$\int\limits_{\Omega_1} \frac{dy}{|z-y|^{n-1}} \leqslant \int\limits_{|z-y|\leqslant s} \frac{dy}{|z-y|^{n-1}} + \int\limits_{|z-y|>s, y\in\Omega_1} \frac{dy}{|z-y|^{n-1}}$$
$$\leqslant s\omega_n + s^{1-n}\mu_n(\Omega_1)$$

với mỗi $s > 0$, ở đó ω_n là diện tích mặt cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^n$. Đặt $s = \mu_n(\Omega_1)^{1/n}$ ta nhận được kết quả của Định lí. Định lí được chứng minh.

Định lí sau đây miêu tả sự thác triển một hàm thuộc $W_p^m(\Omega)$ ra một miền rộng hơn.

Định lí 1.11. *Giả sử Π là một hình hộp trong $\mathbb{R}^n$:*

$$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n : -a_j < x_j < a_j, j = 1, \dots, n\}$$

và $u \in W_p^m(\Pi), p \geqslant 1$. Khi đó tồn tại một hàm $u_1 \in W_p^m(\mathbb{R}^n)$, sao cho $u_1(x) = u(x)$ với mọi $x \in \Pi$ và

$$\operatorname{supp} u_1(x) \subset \Pi_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : -2a_j < x_j < 2a_j, j = 1, \dots, n\}.$$

Hơn nữa,

$$\|u_1(x)\|_{W_p^m(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|u(x)\|_{W_p^m(\Pi)},$$

ở đó C là hằng số không phụ thuộc vào hàm $u(x)$.

Chứng minh. Đặt

$$u_1(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j u(-a_1 - 2^{-j-1}x_1, x_2, \dots, x_n)$$

đối với $-2a_1 < x_1 < -a_1, -a_j < x_j < a_j, j = 2, \dots, n$. Các hằng số α_j thỏa mãn

$$\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j (-1)^k 2^{-k(j+1)} = 1, k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Đây là một hệ đại số với định thức khác không nên nó có nghiệm. Như vậy, ta đã xác định được hàm u_1 trong hình hộp

$\Pi' = \{x \in \mathbb{R}^n : -2a_1 < x_1 < -a_1, -a_j < x_j < a_j, j = 2, \dots, n\}.$

Hơn nữa,

$$\|u_1(x)\|_{W_p^m(\Pi')} \leqslant C_1 \|u(x)\|_{W_p^m(\Pi)},$$

ở đó C_1 là hằng số không phụ thuộc vào u. Chú ý thêm rằng, $u_1 \in C^{m-1}(\Pi')$ nếu $u \in C^m(\Pi)$. Cũng làm như vậy ta có thể thác triển được hàm u ra các phía khác của hộp Π. Định lí được chứng minh.

Cách thác triển đã làm trong chứng minh Định lí có tên là *thác triển Whitney*.

1.4. Không gian $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$

Không gian $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$ với $1 \leqslant p < \infty$ là bao đóng của $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$ trong chuẩn của không gian $W_p^m(\Omega)$.

Định lí 1.12 (Friedrichs). *Giả sử Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó tồn tại một hằng số C_Ω phụ thuộc vào Ω, sao cho*

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} \leqslant C_\Omega \Big(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \Big| \frac{\partial u}{\partial x_j} \Big|^p dx \Big)^{1/p}$$

với mọi hàm $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$.

Chứng minh. Giả sử $u \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$ và giả sử Ω nằm trong dải $J = \{x \in \mathbb{R}^n : a < x_1 < b\}$. Đặt $u(x) = 0$ bên ngoài Ω. Khi đó

$$u(x) = \int\limits_a^{x_1} \frac{\partial u(t, x_2, \dots, x_n)}{\partial t} dt.$$

Do đó,

$$|u(x)| \leqslant \int\limits_a^b \Big|\frac{\partial u(t, x_2, \ldots, x_n)}{\partial t}\Big| dt$$

và nhờ bất đẳng thức Hölder ta nhận được

$$|u(x)|^p \leqslant (b-a)^{p/q} \int\limits_a^b \Big|\frac{\partial u(t, x_2, \ldots, x_n)}{\partial t}\Big|^p dt,$$

ở đó p, q là các số sao cho $1/p + 1/q = 1$. Sau khi lấy tích phân cả hai vế của bất đẳng thức này trên J ta nhận được kết luận của Định lí đối với mọi hàm $u \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega)$.

Bởi vì không gian $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ là làm đầy của $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega)$ trong chuẩn của $W_p^1(\Omega)$, nên kết luận của Định lí cũng đúng cho mọi hàm $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$. Định lí được chứng minh.

Bây giờ ta đi xét một số tính chất của các hàm trong các không gian Sobolev.

Định lí 1.13. *Giả sử* $u(x) \in W_p^m(\Omega), p \geqslant 1$ *và* $\operatorname{supp} u(x) \subset\subset \Omega$. *Khi đó* $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$.

Chứng minh. Giả sử $u_h(x)$ là trung bình hóa của hàm $u(x)$. Bởi vì $u_h(x)$ khả vi vô hạn với giá compact. Hơn nữa, giả sử $u_h(x) \to u(x)$ trong không gian $W_p^m(\Omega)$ khi $h \to 0$. Từ đó nhận được điều khẳng Định của Định lí. Định lí được chứng minh.

Từ định nghĩa không gian $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$ và Định lí 1.13 ta suy ra định lí sau.

Định lí 1.14. *Không gian* $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\mathbb{R}^n)$ *và* $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ *trùng nhau.*

Chứng minh. Giả sử $u(x) \in W_p^m(\mathbb{R}^n)$ và $\theta(t) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^1)$ là hàm sao cho $\theta(t) = 1$ với $t < 1$ và $\theta(t) = 0$ với $t > 2$. Đặt

$u_k(x) = u(x)\theta(|x| - k)$. Khi đó

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha(u_k - u)|^p dx \leqslant C \int_{|x|>k+1} \sum_{|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha u|^p dx \to 0$$

khi $k \to \infty$. Do Định lí 1.13 hàm $u_k(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^m(\mathbb{R}^n)$ với mọi k. Từ đây suy ra $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^m(\mathbb{R}^n)$. Định lí được chứng minh.

1.5. Không gian $W_2^{m,l}(Q_T)$

Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{R}^n$ và $T = \text{const} > 0$. Kí hiệu $Q_T = \Omega \times (0, T) = \{(x, t) :\ x \in \Omega,\ t \in (0, T)\}$ và gọi nó là *trụ* với chiều cao T và đáy Ω.

$W_2^{m,l}(Q_T)$ là không gian bao gồm tất cả các hàm $u(x, t) \in L_2(Q_T)$, sao cho tồn tại tất cả các đạo hàm suy rộng theo x đến cấp m và theo t đến cấp l thuộc $L_2(Q_T)$, trong nó trang bị chuẩn

$$\|u\|_{W_2^{m,l}(Q_T)} = \Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_{Q_T} |D^\alpha u|^2 dxdt + \sum_{k=1}^{l}\int_{Q_T} \Big|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big|^2 dxdt\Big)^{1/2}. \tag{1.7}$$

Trường hợp $l = 0$, số hạng thứ hai trong vế phải của (1.7) coi như không có.

Không khó khăn có thể kiểm tra được $W_2^{m,l}(Q_T)$ là một không gian Banach. Hơn nữa, nó là không gian Hilbert với tích vô hướng được sinh từ chuẩn (1.7).

$\overset{\circ}{W}{}_2^{m,l}(Q_T)$ là không gian con của $W_2^{m,l}(Q_T)$, bao gồm tất cả các hàm $u(x, t)$ thuộc $W_2^{m,l}(Q_T)$ và bằng không gần biên $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$. Điều đó có nghĩa là, $u(x, t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{m,l}(Q_T)$ khi và chỉ khi tồn tại một dãy $\{u_k(x, t)\}_{k=1}^{\infty} \subset C^\infty(Q_T),\ u_k(x, t) = 0$ khi $(x, t) \in Q_T^\delta = \{(x, t) \in Q_T :\ dist\{(x, t), S_T\} < \delta\}$, δ là số dương đủ bé, và $u_k \to u$ trong $W_2^{m,l}(Q_T)$ khi $k \to \infty$. $\overset{\circ}{W}{}_2^{m,l}(Q_T)$ cũng là một không gian Hilbert.

§2. Phép biến đổi Fourier

2.1. Phép biến đổi Fourier trong không gian Schwartz

Kí hiệu S là tập hợp tất cả các hàm $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sao cho với mọi k và α ta có

$$(1 + |x|^2)^k |D^\alpha u(x)| \leqslant C_{k,\,\alpha},$$

ở đó $C_{k,\alpha}$ chỉ phụ thuộc vào k và α. Sự hội tụ trong S được xác định như sau: một dãy $\{u_m(x)\}_{m=1}^\infty \subset S$ được gọi là hội tụ đến hàm $u(x)$ nếu dãy $\{(1+|x|^2)^k D^\alpha u_m(x)\}_{m=1}^\infty$ hội tụ đều đến $(1+|x|^2)^k D^\alpha u(x)$ khi $m \to \infty$. Khi đó S được gọi là *không gian Schwartz*.

Từ định nghĩa không gian Schwartz suy ra $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S$. Ngoài ra, với mỗi đa thức $P(x)$ ta có $e^{-|x|^2}P(x)$ thuộc S. Nếu $u(x) \in S$, thì

$$\widetilde{u}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-ix\xi} dx \tag{2.1}$$

được gọi là *phép biến đổi Fourier* của hàm $u(x)$, ở đây $x\xi = \sum\limits_{j=1}^n x_j \xi_j$. Người ta còn dùng kí hiệu $F_{x\to\xi}u$ để chỉ rõ phép biến đổi Fourier chuyển biến x thành biến ξ.

Bổ đề 2.1. *Nếu $u(x) \in S$, thì $\widetilde{u}(\xi) \in S$.*

Chứng minh. Đối với mỗi α ta có

$$D^\alpha \widetilde{u}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (-ix)^\alpha u(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Bởi vì $|\xi|^{2k} D^\alpha \widetilde{u}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (-ix)^\alpha u(x)(-\Delta)^k e^{-ix\xi} dx$. Mặt khác,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (-ix)^\alpha u(x)(-\Delta)^k e^{-ix\xi} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (-\Delta)^k [(-ix)^\alpha u(x)] e^{-ix\xi} dx,$$

ở đó $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{n} \partial^2/\partial x_j^2$, nên $|\xi|^{2k} |D^\alpha \widetilde{u}| \leqslant C'_{k,\alpha}$. Từ đó ta nhận được $\widetilde{u} \in S$. Bổ đề được chứng minh.

Định lí 2.1 (Phép biến đổi Fourier ngược). *Đối với mỗi hàm $u(x) \in S$ có công thức*

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Chứng minh. Trước tiên ta đi chứng minh cho $n = 1$. Ta có

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-it\xi} dt \Big) e^{ix\xi} d\xi \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lim_{N\to\infty} \int\limits_{-N}^{N} e^{i(x-t)\xi} u(t) dt d\xi \\
&= \lim_{N\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iN(x-t)} - e^{-iN(x-t)}}{i(x-t)} u(t) dt \\
&= 2 \lim_{N\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin N(x-t)}{(x-t)} u(t) dt. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$