NGUYỄN MẠNH HÙNG

HỆ PHƯƠNG TRÌNH HYPERBOLIC TRONG TRỤ KHÔNG TRƠN

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn chuyên khảo về hệ phương trình hyperbolic trong các trụ có đáy không trơn được viếtdựa trên các kết quả nghiên cứu của tác giả và cộng sự trong khoảng gần hai mươi năm trở lại đây. Mục đích chính của cuốn sách là trình bày một cách hệ thống hướng nghiên cứu các bài toán biên ban đầu đối với hệ hyperbolic trong các trụ với đáy có biên không trơn bao gồm cả trụ hữu hạn và vô hạn. Với mục đích như vậy, cuốn sách được chia làm ba chương và phần phụ lục.

Chương I trình bày các kết quả cơ bản về bài toán biên ban đầu thứ nhất đối với hệ hyperbolic trong trụ hữu hạn có biên chứa điểm conic. Các kết quả về sự ồn tại và duy nhất nghiệm suy rộng, cũng như tính trơn cuả nghiệm này theo biến thời gian vẫn đúng trong trường hợp đáy của trụ có biên tùy ý [68,70,71,74,75]. Bài toán biên ban đầu thứ hai đối với hệ hyperbolic trong trụ hữu hạn có đáy không trơn được xét tiếp theo ở chương thứ hai. Trong chương này chúng tôi đưa vào các kết quả nghiên cứu về tính giải được duy nhất của bài toán khi đáy có biên bất kì [67]. Tuy nhiên, các kết quả về tính chính qui của nghiệm suy rộng theo tất cả các biến và biểu diễn tiệm cận của nghiệm suy rộng chỉ nhận được trong trụ với đáy có biên chứa điểm conic. Chương cuối trình bày các bài toán biên ban đầu trong trụ vô hạn với đáy không trơn. Trong chương này chúng tôi đưa vào các không gian Sobolev có trọng khi biến thời gian ra vô cùng để xét bài toán trong trụ vô hạn. Các kết quả cơ bản là các định lí về sự tồn tại duy nhất, tính trơn theo biến thời gian và biểu diễn tiệm cận của nghiệm suy rộng trong lân cận điểm conic [95,96,100,101]. Cuối mỗi chương chúng tôi đều đưa ra các ví dụ ứng dụng vào các bài toán cụ thể.

Để có cách nhìn hệ thống về các bài toán biên ban đầu đối với các hệ không dừng trong trụ có đáy không trơn chúng tôi đưa vào phần phụ lục. Hai mục đầu của phần này giới thiệu các kêt quả nghiên cứu về các bài toán biên ban đầu đối với hệ phương trình Schrodinger và phương trình parabolic trong các trụ với đáy chứa điểm conic. Bài toán biên ban đầu thứ nhất đối với hệ hyperbolic trong trụ có đáy chứa điểm lùi mới được chúng tôi nghiên cứu gần đây và được trình bày vào cuối của phụ lục. Chúng tôi bước đầu nhận được các kết quả về tính giải được, tính chính qui và tiệm cận của nghiệm suy rộng của bài toán trong trụ hữu hạn. Phần phụ lục chỉ dừng lại giới thiệu các kết quả mà không chứng minh. Các chứng minh chi tiết có thể xem trong các công trình [86-94, 97-99].

Cuốn sách được viết nhằm phục vụ cho nghiên cứu sinh, học viên cao học thuộc chuyên ngành phương trình vi phân và tích phân của trường Đại Học Sư Phạm Hà Nội. Ngoài ra, cuốn sách có thể làm tài liệu giảng dạy chuyên đề vào năm cuối cho sinh viên, đặc biệt là sinh viên lớp chất lượng cao của khoa Toán-Tin của Trường. Cuốn sách cũng có thể là tài liệu tham khảo cho những ai muốn tìm hiểu sâu về các bài toán biên đối với hệ không dừng trong miền không trơn.

Cuốn sách được viết không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả mong nhận được các ý kiến đóng góp của các nhà Toán học, các bạn đồng nghiệp và các độc giả gần xa. Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ: "Seminar phương trình vi phân và tích phân, khoa Toán-Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội". Cuối cùng tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn tới Quỹ Phát triển Khoa học và Công nghệ Quốc gia Việt nam (NAFFOSTED) đã tài trợ cho cuốn sách.

Tác giả

Nguyễn Mạnh Hùng

MỞ ĐẦU

Các bài toán biên đối với các phương trình và hệ phương trình dừng cũng như không dừng tuyến tính trong các miền trơn đã được nghiên cứu gần như hoàn thiện vào giữa thế kỉ XX [1,9,11,12,29,30-32,48,61-63,65,103-106]. Tuy nhiên các kết quả này chỉ dừng lại là các bài toán được xét trong các miền vơi biên trơn. Một vấn đề đặt ra cần nghiên cứu các bài toán trong các miền không trơn, tức là biên của miền chứa điểm kì. Đây là một vấn đề đến lúc đó chưa đưc khắc phục vì việc giải bài toán trong miền bị chặn được đưa về bài toán trong toàn không gian R^n và bài toán trong toàn không gian R^n_+ nhờ phép uốn thẳng biên của miền thông qua phép phân hoạch đơn vị. Người đầu tiên giải quyết bài toán biên tổng quát đối với phương trình elliptic trong các miền chứa điểm kì dị kiểu nón phải kể đến là nhà toán học Nga, V. A.Kondratiev. Ông đã giải quyết được một số vấn đề mang tính nguyên lí để khắc phục điểm kì dị kiểu nón của bài toán biên tổng quát đối với phương trình elliptic. Một trong các kết quả quan trọng của V. A. Kondratiev là biểu diễn được tiệm cận của nghiệm bài toán biên tổng quát đối với phương trình elliptic trong lân cận điểm nón dưới dạng chuỗi. Từ đó có thể thấy được mối liên hệ giữa tính trơn của nghiệm và độ mở của góc nón cũng như có thể đánh giá được độ xấp xỉ nghiệm của bài toán [10,35-40]. Từ hướng nghiên cứu này các nhà toán học tiếp tục nghiên cứu hệ elliptic và hướng nghiên cứu này khá hoàn thiện vào những năm chín mươi của thế kỉ trước [4-8,15,16,18,20-23,42,49,50-59,66,69,72].

Nghiên cứu các bài toán biên đối với phương trình và hệ không dừng trong trụ có đáy không trơn được nghiên cứu vào cuối thế kỉ XX. Các kết quả ban đầu nhận được chủ yếu là cho các phương trình không dừng cấp hai [19,33,43-47,64]. Tiếp theo các bài toán biên trong trụ có đáy không trơn được nghiên cứu một cách hệ thống đối với các hệ phương trình: hyperbolic, parabolic và Schrodinger.

Các phương pháp truyền thống nhờ phép biến đổi Fourier hoặc Laplace để đưa bài toán không dừng về bài toán dừng chỉ thu được kết quả đối với các phương trình và hệ có các hệ số không phụ thuộc vào biến thời gian [14,26,60]. Từ những hạn chế này phương pháp cắt thiết diện và nghiên cứu nghiệm xấp xỉ đã được đưa vào khi nghiên cứu các bài toán dừng. Khi đó một vấn đề thuộc về nguyên lí đã được giải quyết: nghiên cứu được bài toán với hệ số của hệ phương trình phụ thuộc vào cả biến thời gian không những cho miền với biên không trơn, mà cho cả miền với biên trơn.

Trước hết các bài toán không dừng với hệ số phụ thuộc thời gian được nghiên cứu trong trụ hữu hạn với đáy là miền không trơn. Các kết quả về tính giải được và tính trơn theo biến thời gian của các bài toán biên ban đầu thứ nhất và thứ hai trong các trụ với đáy là miền với biên bất kì được đăng trong các công trình [67,68,70]. Do sử dụng phương pháp cắt thiết diện, nên ban đầu nghiệm nhận được hạn chế chỉ là nghiệm suy rộng trong các không gian kiểu Sobolev, tức là các nghiệm có đạo hàm suy rộng bậc thấp hơn bậc của hệ phương trình.

Một vấn đề tự nhiên đặt ra là phải làm trơn nghiệm suy rộng theo tất cả các biến để nghiệm này gần với nghiệm thông thường. Các kết quả về tính trơn của nghiệm theo cả biến thời gian và không gian của các bài toán biên đối với hệ hyperbolic trong các trụ với đáy là miền chứa điểm nón có trong công trình [74] và trong trụ với đáy là miền với góc hai biên trong [71]. Các kết quả tương tự đối với hệ Schrodinger có trong công trình [73]. Bài toán biên tổng quát đối với hệ hyperbolic trong trụ với đáy là miền chứa điểm nón trên biên được đăng trong công trình [75], ở đó nhận được biểu diễn tiệm cận nghiệm gần điểm nón dưới dạng chuỗi và tách được nghiệm thành hai phần: phần trơn của nghiệm và phần tiệm cận của nghiệm gần điểm nón. Như vậy, vấn đề biên không trơn và hệ số phụ thuộc thời gian của các bài toán dừng được giải quyết một cách có hệ thống. Tuy nhiên, các kết quả trên mới chỉ dừng lại trong các hình trụ hữu hạn.

Từ đầu thế kỉ XXI các bài toán biên ban đầu đối với các hệ không dừng trong trụ vô hạn với đáy không trơn đã được nghiên cứu. Các kết quả đối với bài toán biên ban đầu thứ nhất đối với phương trình và hệ parabolic trong trụ vô hạn với đáy chứa điểm conic được nghiên cứu trong các công trình [76-80]. Các kết quả về tính đặt đúng của bài toán biên ban đầu thứ nhất đối với phương trình có trong công trinh [77] và đánh giá được nghiệm suy rộng khi biến thời gian ra vô cùng [76,77]. Bài toán biên ban đầu thứ nhất đối với hệ parabolic được nghiên cứu trong [78-80], ở đó nhận được các kết quả về tính giải được duy nhất, tính trơn theo các biến và tiệm cận của nghiệm trong lân cận của nghiệm gần điểm conic. Từ những kết quả này có thể kiểm soát được dáng điệu của nghiệm gần các điểm kì dị và khi thời gian ra vô cùng. Tiếp theo bài toán biên tổng quát đối với phương trình parabolic trong trụ với đáy không trơn được nghiên cứu trong các công trình [87-91]. Một kết quả quan trọng của bài toán biên tổng quát đối với phương trình parabolic trong trụ với đáy chứa điểm nón được đăng trong [88], ở đó trình bày các kết quả về tính trơn của nghiệm phụ thuộc vào dáng điệu của diểm kì dị thông qua lí thuyết phổ của bài toán elliptic [89]. Những kết quả tương tự cho bài toán biên ban đầu thứ nhất đối với hệ Schrodinger được đăng trong các công trình [81-86] và cho bài toán biên ban đầu thứ hai có trong [92-95]. Các bài toán biên ban đầu đối với hệ hyperbolic trong trụ vô hạn với đáy không trơn được xét trong các công trình [96,97,101,102]. Các công trình [97,101] xét tính trơn và tiệm cận của nghiệm gần điểm nón của bài toán Cauchy-Dirichlet đối với phương trình hyperbolic cấp hai. Bài toán này đối với hệ phương trình hyperbolic được xét trong công trình [96,102], ở đó nhận được các kết quả về biểu diễn tiệm cận nghiệm suy rộng gần điểm conic và về tính trơn của nghiệm suy rộng theo thời gian chỉ phụ thuộc vào độ trơn theo thời gian của vế phải và các hệ số của hệ phương trình mà không phụ thuộc vào dáng điệu của biên, còn độ trơn của nghiệm theo biến không gian lại phụ thuộc vào độ mở của góc conic.

Các kết quả trên đây về tính trơn theo các biến và biểu diễn tiệm cận của nghiệm suy rộng mới chỉ được nghiên cứu trong trong trụ với đáy là miền chứa điểm conic và trong các không gian Hilbert. Việc nghiên cứu một cách hệ thống các bài toán biên đối với các hệ không dừng trong các trụ với đáy chứa các điểm kì dị không phải điểm conic và mở rộng các kết quả ra không gian Banach là một vấn đề được quan tâm ngày nay. Đi theo hướng này, chúng tôi đang nghiên cứu các bài toán biên đối với hệ hyperbolic trong trụ hữu hạn có đáy chứa điểm lùi [98-100].

Như vậy, hoàn thiện lí thuyết các bài toán biên tổng quát đối với phương trình và hệ phương trình không dừng trong các trụ với đáy có biên không trơn là một vấn đề được quan tâm. Vấn đề nổi bật là đánh giá nghiệm suy rộng dựa vào khai triển tiệm cận, trong đó cần nghiên cứu các hệ số của tiệm cận và các bài toán phổ được sinh ra từ các bài toán biên tương ứng. Tiếp theo là các bài toán phi tuyến đối với đối với phương trình và hệ phương trình không dừng. Các vấn đề này vẫn đang được tiếp tục đề cập tại semenar "Phương trình Vi phân và Tích phân" của khoa Toán-Tin, trường Đại học Sư phạm Hà Nội.

KÍ HIỆU

Khắp nơi trong cuốn sách, nếu không chú ý riêng, ta sử dụng các kí hiệu sau:

Kí hiệu Ω là một miền trong không gian Euclide n chiều $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ và $\partial\Omega$ là biên của nó. Kí hiệu $Q_{a,b} = \Omega \times (a,b) = \{(x,t):\ x \in \Omega,\ t \in (a,b),\ 0 \leqslant a < b < \infty\}$ là trụ trong $\mathbb{R}^{n+1}$ và mặt xung quanh của nó là $S_{a,b} = \partial\Omega \times (a,b) = \{(x,t):\ x \in \partial\Omega,\ t \in (a,b)\}$. $Q_T = Q_{0,T},\ S_T = S_{0,T}$.

Giả sử u là hàm vector giá trị phức với các thành phần $u_1, ..., u_n$. Ta dùng các kí hiệu: $u = (u_1, ..., u_n)$ và đạo hàm (suy rộng) cấp α theo biến x được là $D^\alpha = D_x^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}} \equiv \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}$, cấp k theo biến t là $\dfrac{\partial^k}{\partial t^k} \equiv \partial^k/\partial t^k \equiv u_{t^k}$, ở đây $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ là kí hiệu đa chỉ số với α_i là các số nguyên không âm, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Kí hiệu $C^k(\Omega)$ là tập hợp tất cả các hàm có các đạo hàm liên tục đến cấp k trong miền Ω, $0 \leqslant k \leqslant \infty$, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$, và $\mathring{C}^k(\Omega) = \mathring{C}(\Omega) \cap C^k(\Omega)$, ở đó $\mathring{C}(\Omega)$ là tập hợp tất cả các hàm liên tục trong Ω với giá compact thuộc Ω.

- $H^l(\Omega)$ là không gian bao gồm tất cả các hàm $u(x) \in L_2(\Omega)$, sao cho $D^\alpha u(x) \in L_2(\Omega)$ với mọi $|\alpha| \leqslant l$ và có chuẩn được xác định bởi công thức

$$\|u\|_{H^l(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|=0}^{l} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx\Big)^{1/2}.$$

- $\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega)$ là bao đóng của $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$ trong chuẩn của $H^l(\Omega)$.

- $H^{l,k}(Q_T)$ là không gian bao gồm tất cả các hàm $u(x,t) \in L_2(Q_T)$, sao cho tồn tại các đạo hàm suy rộng theo x đến cấp m thuộc $L_2(Q_T)$ và theo t đến cấp l thuộc $L_2(Q_T)$ với chuẩn sau:

$$\|u\|_{H^{l,k}(Q_T)} = \Big(\sum_{|\alpha|=0}^{l} \int_{Q_T} |D^\alpha u|^2 dxdt + \sum_{j=1}^{k} \int_{Q_T} |u_{t^j}|^2 dxdt\Big)^{1/2}.$$

- $\overset{\circ}{H}{}^{l,k}(Q_T)$ là bao đóng trong không gian $H^{l,k}(Q_T)$ của tập hợp tất cả các hàm $u(x,t)$ thuộc $C^\infty(Q_T)$ sao cho $u(x,t) = 0$ khi $(x,t) \in Q_T^\delta = \{(x,t) \in Q_T : \ dist\{(x,t), S_T\} < \delta\}$, δ là số dương đủ bé.

Giả sử $\partial\Omega$ là mặt khả vi vô hạn khắp nơi trừ gốc tọa độ, còn trong lân cận nào đó của gốc tọa độ Ω trùng với nón $K = \{x : x/|x| \in G\}$, ởđây G là miền trơn trên mặt cầu đơn vị S^{n-1}.Kí hiệu $r = |x|$ là khoảng cách từ điểm x đến gốc tọa độ. Ta có các không gian hàm sau:

- $H_\beta^{l,k}(Q_T)$ là không gian với chuẩn được xác định bởi

$$\|u\|^2_{H_\beta^{l,k}(Q_T)} = \sum_{|\alpha|=0}^{l} \int_{Q_T} r^{2(\beta+|\alpha|-l)} |D^\alpha u|^2 dxdt + \sum_{j=0}^{k} \int_{Q_T} |u_{t^j}|^2 dxdt.$$

- $H^l_\beta(Q_T)$ là không gian với chuẩn

$$\|u\|_{H^l_\beta(Q_T)} = \Bigg(\sum_{|\alpha|+j=0}^{l} \int\limits_{Q_T} r^{2(\beta+|\alpha|+j-l)} |D^\alpha u_{t^j}|^2 dxdt \Bigg)^{1/2}.$$

- $V^l_\beta(Q_T)$ là không gian các hàm trong đó chuẩn được xác định bằng công thức

$$\|u\|_{V^l_\beta(Q_T)} = \Bigg(\sum_{|\alpha|+k=1}^{l} \int\limits_{Q_T} r^{2(\beta+|\alpha|+k-l)} |D^\alpha u_{t^k}|^2 dxdt + \int\limits_{Q_T} |u|^2 dxdt \Bigg)^{1/2}.$$

Ta đưa vào các không gian Sobolev trong trụ vô hạn. Kí hiệu $\Omega_\infty = \Omega \times (0,\infty),\ S_\infty = \partial\Omega \times (0,\infty)$, $\gamma = const > 0$. Ta có các không gian hàm sau:

- $H^{l,k}(e^{-\gamma t};\Omega_\infty)$ là không gian các hàm $u = u(x,t)$ với các đạo hàm suy rộng $D^\alpha u, |\alpha| \leqslant l$, u_{t^s}, $1 \leqslant s \leqslant k$ sao cho

$$\|u\|^2_{H^{l,k}(e^{-\gamma t},\Omega_\infty)} = \int\limits_{\Omega_\infty} \Big(\sum_{|\alpha|\leqslant l} |D^\alpha u|^2 + \sum_{s=0}^{k} |u_{t^s}|^2 \Big) e^{-2\gamma t} dxdt < \infty.$$

- $\overset{o}{H}{}^{l,k}(e^{-\gamma t},\Omega_\infty)$ là bao đóng theo chuẩn trong không gian $H^{l,k}(e^{-\gamma t},\Omega_\infty)$ của tập tất cả các hàm khả vi vô hạn trên Ω_∞ triệt tiêu gần S_∞.

- $H^{l,k}_\beta(e^{-\gamma t},\Omega_\infty)$ là không gian bao gồm tất cả các hàm $u(x,t)$ với chuẩn

$$\|u\|^2_{H^{l,k}_\beta(e^{-\gamma t},\Omega_\infty)} = \int\limits_{\Omega_\infty} \Big(\sum_{|\alpha|=0}^{l} r^{2(\beta+|\alpha|-l)} |D^\alpha u|^2 + \sum_{s=0}^{k} |u_{t^s}|^2 \Big) e^{-2\gamma t} dxdt.$$

- $H^l_\beta(e^{-\gamma t},\Omega_\infty)$ là không gian các hàm $u(x,t)$ với chuẩn satisfying

$$\|u\|^2_{H^l_\beta(e^{-\gamma t},\Omega_\infty)} = \int\limits_{\Omega_\infty} \Big(\sum_{|\alpha|+s=0}^{l} r^{2(\beta+|\alpha|+s-l)}|D^\alpha u_{t^s}|^2\Big) e^{-2\gamma t}dxdt.$$

- $V^l_\beta(e^{-\gamma t},\Omega_\infty)$ là không gian các hàm $u(x,t)$ với chuẩn

$$\|u\|^2_{V^l_\beta(e^{-\gamma t},\Omega_\infty)} = \int\limits_{\Omega_\infty} \Big(\sum_{s+|\alpha|=1}^{l} r^{2(\beta+s+|\alpha|-l)}|D^\alpha u_{t^s}|^2 + |u|^2\Big) e^{-2\gamma t}dxdt.$$

- $V^{l,0}_{\beta,h}(e^{-\gamma t},\Omega_\infty)$- không gian gồm các hàm nhận giá trị trong không gian $H^l_\beta(\Omega)$, xác định trên $(0,\infty)$ và có đạo hàm theo t đến cấp h, thỏa mãn

$$\|u\|_{V^{l,0}_{\beta,h}(e^{-\gamma t},\Omega_\infty)} := \Big(\sum_{j=0}^{h} \int\limits_0^\infty \Big\| \frac{d^j u(t)}{dt^j}\Big\|^2_{H^l_\beta(\Omega)} e^{-2\gamma t}dt\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

- $V^{l-\frac{1}{2},0}_{\beta,h}(e^{-\gamma t},S_\infty)$- không gian gồm các hàm nhận giá trị trong $H^{l-\frac{1}{2}}_\beta(\partial\Omega)$, xác định trên $(0,\infty)$ và có đạo hàm theo t đến cấp h, thỏa mãn

$$\|u\|_{V^{l-\frac{1}{2},0}_{\beta,h}(e^{-\gamma t},S_\infty)} := \Big(\sum_{j=0}^{h} \int\limits_0^\infty \Big\| \frac{d^j u(t)}{dt^j}\Big\|^2_{H^{l-\frac{1}{2}}_\beta(\partial\Omega)} e^{-2\gamma t}dt\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

- $L^k(e^{-\gamma t},(0,\infty))$ là không gian các hàm $u(t)$ được xác định nhờ chuẩn:

$$\|u\|_{L^k(e^{-\gamma t},(0,\infty))} = \Big(\sum_{s=0}^{k} \int_0^\infty |u_{t^s}|^2 e^{-2\gamma t}dxdt\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

- Giả sử X là không gian Banach với chuẩn $\|.\|_X$. Kí hiệu $L_\infty(0,\infty;X)$ là không gian bao gồm tất cả các hàm $u(.,t)$ nhận giá trị trong không gian X, xác định trên $[0,\infty)$ sao cho

$$\|u\|_{L^\infty(0,\infty;X)} = ess\sup_{t>0} \big\|u(.,t)\big\|_X < +\infty.$$

CHƯƠNG 1

BÀI TOÁN BIÊN BAN ĐẦU THỨ NHẤT ĐỐI VỚI HỆ HYPEBOLIC TRONG TRỤ HỮU HẠN

§1.1. TÍNH GIẢI ĐƯỢC CỦA BÀI TOÁN

1. Đặt bài toán

Giả sử Ω là một *miền bị chặn* với biên $\partial\Omega$ tùy ý trong $\mathbb{R}^n$ và $Q_T, 0 < T < \infty$, là trụ với đáy Ω. Xét toán tử vi phân ma trận

$$L(x,t,D) = \sum_{|p|,|q|=1}^{m} D^p a_{pq}(x,t) D^q + \sum_{|p|=1}^{m} a_p(x,t) D^p + a(x,t),$$

trong đó a_{pq}, a_p, a - các ma trận $s \times s$, $a_{pq} = (-1)^{|p|+|q|} a^*_{pq}$. Các phần tử của các ma trận này là các hàm liên tục trong $\overline{Q}_T$. Giả thiết điều kiện sau thoả mãn

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x,t)\xi^\alpha \xi^\beta \eta\overline{\eta} \geqslant \gamma_0 |\xi|^{2m} |\eta|^2$$

với mọi $\xi \in R^n$, $\eta \in C^s$ và $(x,t) \in \overline{\Omega}_\infty$, $\gamma_0 = cconst > 0$.

Xét trong trụ Q_T bài toán:

$$(-1)^{m-1}L(x,t,D)u - u_{tt} = f, \tag{1.1.1}$$

$$u\Big|_{t=0} = u_t\Big|_{t=0} = 0, \tag{1.1.2}$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_{S_T=\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \quad j = 0, ..., m-1, \tag{1.1.3}$$

ở đó $f = f(x,t)$ là hàm đã cho trong Q_T, còn ν là pháp véc tơ ngoài tới *mặt xung quanh* S_T.

Một hàm $u(t)$ được gọi là *nghiệm suy rộng* trong không gian $H^{m,1}(Q_T)$ của bài toán $(1.1.1)-(1.1.3)$ nếu $u(x,t) \in \overset{o}{H}{}^{m,1}(Q_T)$, $u(x,0) = 0$, và thỏa mãn đồng nhất thức tích phân sau

$$(-1)^{m-1}\int\limits_{Q_T}\Big[\sum_{|p|,|q|=1}^{m}(-1)^{|p|}a_{pq}D^q u\overline{D^p\eta} + \sum_{|p|=1}^{m}a_pD^pu\overline{\eta} + au\overline{\eta}\Big]dxdt$$

$$+\int\limits_{Q_T}u_t\overline{\eta_t}dxdt = \int\limits_{Q_T}f\overline{\eta}dxdt \tag{1.1.4}$$

với mọi hàm thử $\eta = \eta(x,t) \in \overset{o}{H}{}^{m,1}(Q_T)$, $\eta(x,T) = 0$.

Để tiện cho việc nghiên cứu sau này, ở đây ta đưa vào một số bổ đề. Kí hiệu

$$B(u,v)(t) = \sum_{|p|,|q|=1}^{m}(-1)^{|p|}\int\limits_{\Omega}a_{pq}D^q u\overline{D^p v}dx. \tag{1.1.5}$$

Bổ đề 1.1.1. (bất đẳng thức *Garding mở rộng*) *Tồn tại các hằng* *số* μ_0, λ_0 $(\mu_0 > 0, \lambda_0 \geqslant 0)$, *sao cho*

$$(-1)^m B(u,u)(t) \geqslant \mu_0 \|u(x,t)\|_{H^m(\Omega)} - \lambda_0 \|u(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}$$

với mọi hàm $u(x,t) \in \overset{o}{H}{}^{m,1}(Q_T)$.

Chứng minh.

Đặt $\beta_{ls} = (-1)^{|l|+m} a_{ls}$ với $|l| + |s| < 2m$. Ta có thể viết

$$(-1)^m B(u,u)(t) = \int\limits_\Omega a_{pq} D^q u \overline{D^p u} dx + \sum_{|l|+|s|<2m} \int\limits_\Omega \beta_{ls} D^s u \overline{D^l u} dx$$

ở đây và trong cả chứng minh ta dùng kí hiệu a_{pq} để chỉ trường hợp $|p| = |q| = m$.

Trường hợp 1: $a_{pq} = const$, $\beta_{ls} = 0$ với $|l| + |s| < 2m$. Do Ω là miền bị chặn, nên ta luôn coi $\overline{\Omega}$ nằm trong một hình hộp $\Pi \in \mathbb{R}^n$. Đối với $u \in \overset{o}{H}{}^{m,1}(Q_T)$ ta có khai triển Fourier

$$u(x,t) = (2\pi)^{-n/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^i kx,$$

ở đó

$$c_k = c_k(t) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_\Omega u(x,t) e^{-ikx} dx.$$

Hơn nữa, với $|p| \leqslant m$ ta có

$$D^p u = (2\pi)^{-n/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} \int\limits_\Omega D^p u e^{-ikx} dx.$$

Từ đây khi sử dụng tích phân từng phần ta nhận được

$$D^p u = (2\pi)^{-n/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^{|p|} k^p c_k e^{ikx},$$

$$a_{pq} D^p u = (2\pi)^{-n/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^{|p|} k^p a_{pq} c_k e^{ikx}.$$

Sử dụng đẳng thức Parseval và điều diện hyperbolic mạnh và bất đẳng thức Friedrichs ta nhận được

$$\begin{aligned}(-1)^m B(u,u)(t) = (2\pi)^{-n/2} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{|p|,|q|=m} a_{pq} k^p k^q c_k \overline{c_k} \\ & \geqslant a_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^{2m} |c_k|^2_{H^m(\Omega)} \\ & = a_0 \int\limits_{\Omega} |D^m u|^2 dx \geqslant \frac{a_0 c}{(mes\Omega)^{2/n}} \|u(x,t)\|^2_{H^m(\Omega)},\end{aligned}$$

ở đó c là hằng số chỉ phụ thuộc vào n. Như vậy $\gamma_0 = \dfrac{a_0 c}{(mes\Omega)^{2/n}}$, $\lambda_0 = 0$.

Trường hợp 2: $\mathrm{diam}(suppu) < \delta_0$, δ_0 là một số dương nào đó. Giả sử $(x_0, t) \in suppu$. Ta có

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}_0 \|u\|^2_{H^m(\Omega)} &\leqslant \int\limits_{\Omega} a_{pq}(x^0, t_0) D^q u \overline{D^p u} dx \\
&= \int\limits_{\Omega} a_{pq}(x,t) D^q u \overline{D^p u} dx + \sum_{|l|+|s|<2m} \int\limits_{\Omega} \beta_{ls}(x,t) D^s u \overline{D^l u} dx \\
&+ \int\limits_{\Omega} \big[a_{pq}(x^0, t_0) a_{pq}(x,t) \big] D^q u \overline{D^p u} dx \\
&- \sum_{|l|+|s|<2m} \int\limits_{\Omega} \beta_{ls}(x,t) D^s u \overline{D^l u} dx \\
&\leqslant (-1)^m B(u,u)(t) + \max_{(x,t)\in suppu} \sum_{|p|=|q|=m} |a_{pq}(x^0, t_0) a_{pq}(x,t)| \times \\
&\times \|u\|^2_{H^m(\Omega)} + \gamma_1 \|u\|_{H^m(\Omega)} \|u\|_{H^{m-1}(\Omega)},
\end{aligned}
$$

ở đó $\widetilde{\gamma}_0$ không phụ thuộc vào (x^0, t_0).

Do $a_{pq}(x,t)$ liên tục trong $\overline{Q_T}$, nên chọn δ_0 đủ nhỏ ta nhận được

$$
\max_{x \in suppu} \sum_{|p|=|q|=m} |a_{pq}(x^0, t_0) a_{pq}(x,t)| < \frac{1}{2} \widetilde{\gamma}_0.
$$

Từ các lý luận được đưa ra ở trên ta nhận được

$$
\frac{\widetilde{\gamma}_0}{2} \|u\|^2_{H^m(\Omega)} \leqslant (-1)^m B(u,u) + \gamma_1 \|u\|_{H^m(\Omega)} \|u\|_{H^{m-1}(\Omega)}.
$$

Từ đây và bất đẳng thức nội suy ta nhận được kết luận của bổ đề.

Trường hợp 3: tổng quát. Do $a_{pq}(x,t)$ liên tục trong $\overline{Q_T}$ với $|p| = |q| = m$, nên liên tục đều. Do vậy có thể chọn một phân hoạch đơn vị trong $\overline{Q_T}$

$$\sum_{h=1}^{N} \varphi_h^2 = 1,$$

ở đó $\varphi_h \in C^\infty$ $\operatorname{diam}(supp\varphi_h) < \gamma_0$, γ_0 được chọn sao cho

$$\sum_{|p|=|q|=m} |a_{pq}(x^1, t_1) a_{pq}(x^2, t_2)| < \frac{1}{2}\widetilde{\gamma}_0$$

với $|(x^1, t_1) - (x^2, t_2)| < \gamma_0$. Khi đó

$$\begin{aligned}
(-1)^m B(u,u)(t) &= \sum_{h=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \varphi_h^2 a_{pq} D^q u \overline{D^p u} dx \\
&+ \sum_{|l|+|s|<2m} \int\limits_{\Omega} \beta_{ls} D^s u \overline{D^l u} dx \\
&= \sum_{h=1}^{N} \int\limits_{\Omega} a_{pq} D^q \varphi_h u \overline{D^p \varphi_h u} dx + O\Big(\|u\|_{H^m(\Omega)}, \|u\|_{H^{m-1}(\Omega)}\Big).
\end{aligned}$$

Do kết quả trường hợp 2 ta có

$$\|\varphi_h u\|^2 H^m(\Omega) \leqslant \gamma_2 \int\limits_{\Omega} a_{pq} D^q \varphi_h u \overline{D^p \varphi_h u} dx + \gamma_3 \|\varphi_h u\|^2_{L_2(\Omega)}$$

Bởi vậy

$$\begin{aligned}
(-1)^m B(u,u)(t) \geqslant \gamma_4 \|u\|^2_{H^m(\Omega)} - \gamma_5 \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \\
- \gamma_6 \|u\|_{H^m(\Omega)} \|u\|_{H^{m-1}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Từ đây và các lý luận như chứng minh trường hợp 2 ta nhận được kết luận của bổ đề trong trường hơp tổng quát. Bổ đề được chứng minh.

Từ bổ đề 1.1.1và bất đẳng thức *Cauchy* ta có thể chứng minh được kết quả sau.

Bổ đề 1.1.2. *Tồn tại các hằng số* μ_1 *và* λ_1 $(\mu_1 > 0\ \lambda_1 \geqslant 0$*, sao cho*

$$(-1)^m B_1(u,u)(t) \geqslant \mu_1 \|u\|^2_{H^{m,1}_{(Q_T)}} - \lambda_1 \|u\|^2_{L_2(Q_T)}$$

với mọi hàm $u(x,t) \in \overset{o}{H}{}^{m,1}(Q_T)$*, ở đây*

$$B_1(u,u)(t) = B(u,u)(t) + 2Re \sum_{|p|=1}^{m} \int_{\Omega} a_p D^p u \overline{u} dx.$$

Bổ đề 1.1.3. *Giả sử* $f(x,t) \in L_2(Q_T)$ *và* $u(x,t)$ *là nghiệm suy rộng trong không gian* $H^{m,1}(Q_T)$ *của bài toán (1.1.1) - (1.1.3), hơn nữa* $u_{tt} \in L_2(Q_T)$*. Khi đó với hầu khắp* $t \in (0,T)$ *có đẳng thức tích phân*

$$(-1)^m \int_{\Omega} \Big[\sum_{|p|,|q|=1}^{m} (-1)^p a_{pq} D^p u \overline{D^p \chi} + \sum_{|p|=1}^{m} a_p D^p u \overline{\chi} + au\overline{\chi} \Big] dx$$
$$= \int_{\Omega} \big[u_{tt} + f\big] \overline{\chi} dx,$$

ở đó χ *là một hàm tùy ý thuộc* $\overset{o}{H}{}^m(\Omega)$*.*

Chứng minh. Giả sử $\Big\{\chi_k(x) \in \overset{o}{C}{}^\infty(\Omega), \quad k = 1, 2...\Big\}$ là một tập trù mật trong $\overset{o}{H}{}^{m}(\Omega)$. Xét hàm $\theta(\tau) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^1)$ sao cho $\theta(0) = 0$ với $|\tau| > 1/2$ và

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tau) d\tau = 1.$$

Trong đẳng thức (1.1.4) ta chọn

$$\eta(x,t) = h^{-1}\chi_k(x)\theta(\frac{|t-t'|}{h})$$

với $0 < t' < T$, $h < \min(t', T-t')$. Khi đó ta nhận được

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{Q_T} (-1)^{m-1}\Big[\sum_{|p|,|q|=1}^{m} (-1)^{|p|} a_{pq} D^q u \overline{D^p \chi_k}\Big] h^{-1}\theta(\frac{|t-t'|}{h}) dxdt \\
&+ \int\limits_{Q_T} (-1)^{m-1}\Big[\sum_{|p|=1}^{m} a_p D^p u\overline{\chi_k} + au\overline{\chi_k}\Big] h^{-1}\theta(\frac{|t-t'|}{h}) dxdt \\
&- \int\limits_{Q_T} \big[u_{tt}\overline{\chi_k} + f\overline{\chi_k}\big] h^{-1}\theta(\frac{|t-t'|}{h}) dxdt = 0 \qquad (1.1.5)
\end{aligned}$$

Kí hiệu

$$\begin{aligned}
\xi(t) = (-1)^{m-1} \int\limits_{\Omega} \Big[&\sum_{|p|,|q|=1}^{m} (-1)^{|}p| a_{pq} D^q u \overline{D^p \chi_k} \\
&+ \sum_{|p|=1}^{m} a_p D^p u\overline{\chi_k} + au\overline{\chi_k} - u_{tt}\overline{\chi_k} - f\overline{\chi_k}\Big] dx.
\end{aligned}$$

Từ đây và $(1.1.5)$ ta suy ra trung bình hóa của hàm $\xi(t)$ bằng không. Bởi vì $u \in \overset{o}{H}{}^{m,2}(Q_T)$ và $f \in L_2(Q_T)$, nên $\xi(t) \in$

$L_2(0,T)$. Từ đó nhận được $\xi(t) = 0$ trên tập $(0,T) \setminus E_k$, ở đó E_k là tập phụ thuộc vào hàm χ_k và $mesE_k = 0$. Đặt

$$E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Khi đó $\xi(t) = 0$ trên tập $(0,T) \setminus E$. Do tính trù mật của hệ $\{\chi_k\}_{k=1}^{\infty}$, nên

$$(-1)^m \int\limits_{\Omega} \Big[\sum_{|p|,|q|=1}^{m} (-1)^p a_{pq} D^p u \overline{D^p \chi} + \sum_{|p|=1}^{m} a_p D^p u \overline{\chi} + au\overline{\chi}\Big] dx$$
$$= \int\limits_{\Omega} \big[u_{tt} + f\big]\overline{\chi} dx,$$

với $\forall \chi \in \overset{o}{H}{}^m(\Omega)$ và $t \in (0,T) \setminus E$. Bổ đề được chứng minh.

2. Tính giải được của bài toán

Trong mục này ta xét *sự tồn tại và duy nhất nghiệm* suy rộng của bài toán biên ban đầu thứ nhất trong trụ với đáy là miền bị chặn với biên tùy ý.

Định lý 1.1.1. *Giả sử* a_{pq} *là các hàm liên tục trong* Q_T *với* $|p| = |q| = m$ *và*

$$\Big|\frac{\partial a_{pq}}{\partial t}, \frac{\partial a_p}{\partial t}\Big| \leqslant \mu, \quad \mu = const, \quad 1 \leqslant |p|, |q| \leqslant m.$$

Khi đó bài toán $(1.1.1) - (1.1.3)$ *có không nhiều hơn một nghiệm suy rộng trong không gian* $H^{m,1}(Q_T)$.

chứng minh. Giả sử bài toán $(1.1.1)-(1.1.3)$ có hai nghiệm suy rộng trong không gian $H^{m,1}(Q_T)$ là u_1 và u_2. Đặt

$$\eta(x,t)=\begin{cases}\int_b^t[u_1(x,\tau)-u_2(x,\tau)]d\tau & , \quad 0\leqslant t<b\\ 0 & , \quad b\leqslant t\leqslant T\end{cases}$$

ở đó b là một số nào đó thuộc đoạn $[0,T]$. Không khó khăn ta kiểm tra được $\eta(x,t)\in \overset{o}{H}{}^{m,1}(Q_T)$, $\eta_(x,0)=0$. Hơn nữa, $\eta_t=u_1-u_2$. Đặt $u=u_1-u_2$. Khi đó u là nghiệm suy rộng của bài toán $(1.1.1)-(1.1.3)$ trong không gian $H^{m,1}(Q_T)$ với $f\equiv 0$. Từ những lý luận vừa đưa ra và đẳng thức $(1.1.4)$ ta nhận được

$$\begin{aligned}(-1)^m\int\limits_{Q_b}\Big[\sum_{|p|,|q|=1}^{m}(-1)^p a_{pq}D^q\eta_t\overline{D^p\eta}+\sum_{|p|=1}^{m}a_pD^p\eta_t\overline{\eta}\Big]dxdt\\ =\int\limits_{Q_b}u_{tt}\overline{\eta_t}dxdt=0,\quad Q_b=\Omega\times(0,b).\end{aligned}\tag{1.1.6}$$

Kí hiệu $a_{00}=(-1)^m\lambda_1 I$, $a_1=a-a_{00}$, ở đây λ_1 được xác định trong bổ đề $1.1.2$, còn I là ma trận đơn vị cấp $s\times s$. Khi đó ta viết lại $(1.1.6)$dưới dạng. Bởi vì $a_{pq}=(-1)^{|p|+|q|}a^*_{qp}$, nên khi cộng $(1.1.6)$ với liên hợp phức của nó ta nhận được

$$\int\limits_{Q_b} \frac{\partial \eta_t \overline{\eta_t}}{\partial t} dxdt + Re \int\limits_{Q_b} \sum_{|p|,|q|=0}^{m} (-1)^{|p|+m-1} \frac{\partial}{\partial t}\big(a_{pq} D^q \eta \overline{D^p \eta}\big) dxdt$$

$$- Re \int\limits_{Q_b} \sum_{|p|,|q|=0}^{m} (-1)^{|p|+m-1} \frac{\partial a_{pq}}{\partial t} D^q \eta \overline{D^p \eta} dxdt$$

$$+ (-1)^{m-1} 2Re \int\limits_{Q_b} \Big[\sum_{|p|=1}^{m} a_p D^p \eta_t \overline{\eta} + a_1 \eta_t \overline{\eta} \Big] dxdt = 0. \qquad (1.1.7)$$

Khi sử dụng tích phân từng phần và đẳng thức

$$\int\limits_{Q_b} a_p D^p \eta_t \overline{\eta} dxdt = \int\limits_{Q_b} \frac{\partial}{\partial t}\big(a_p D^p \eta \overline{\eta}\big) dxdt - \int\limits_{Q_b} \frac{\partial a_p}{\partial t} D^p \eta \overline{\eta} dxdt - \int\limits_{Q_b} a_p D^p \eta \overline{\eta_t} dxdt,$$

từ $(1.1.7)$ ta nhận được

$$\int\limits_{\Omega} |\eta_t(x,b)|^2 dx + \int\limits_{\Omega} (-1)^m \sum_{|p|,|q|=0}^{m} a_{pq} D^q \eta \overline{D^p \eta}\big|_{t=0} dx$$

$$+ (-1)^m 2Re \sum_{|p|=1}^{m} \int\limits_{\Omega} a_p D^p \eta \overline{\eta}\big|_{t=0} dx + (-1)^{m-1} 2Re \int\limits_{Q_b} a_1 \eta_t \overline{\eta} dxdt$$

$$+ Re \sum_{|p|,|q|=0}^{m} (-1)^{|p|+m} \int\limits_{Q_b} \frac{\partial a_{pq}}{\partial t} D^q \eta \overline{D^p \eta} dxdt$$

$$+ (-1)^m 2Re \int\limits_{Q_b} \sum_{|p|=1}^{m} \Big[\frac{\partial a_p}{\partial t} D^p \eta \overline{\eta} + a_p D^p \eta \overline{\eta_t} \Big] dxdt = 0. \quad (1.1.8)$$

Bởi vì

$$
\begin{aligned}
&B_1(\eta,\eta)(0) + (-1)^m\lambda_1\|\eta(x,0)\|^2_{L_2(\Omega)} \\
&= \int\limits_\Omega \sum_{|p|,|q|=0}^m (-1)^{|p|} a_{pq} D^q\eta\overline{D^p\eta}\Big|_{t=0} dx + 2Re\int\limits_\Omega \sum_{|p|=1}^m a_p D^p\eta\overline{\eta}\Big|_{t=0} dx,
\end{aligned}
$$

nên từ (1.1.8) ta nhận được

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_\Omega |\eta_t(x,b)|^2 dx + (-1)^m B_1(\eta,\eta)(0) \\
&+ \lambda_1\|\eta(x,0)\|^2_{L_2(\Omega)} + (-1)^m 2Re\int\limits_{Q_T} a_1\eta_t\overline{\eta} dxdt \\
&+ Re\int\limits_{Q_b} \sum_{|p|,|q|=0}^m (-1)^{|p|+m}\frac{\partial a_{pq}}{\partial t} D^q\eta\overline{D^p\eta} dxdt \\
&+ (-1)^m 2Re\int\limits_{Q_b} \sum_{|p|=1}^m \Big[\frac{\partial a_p}{\partial t} D^p\eta\overline{\eta} + a_p D^p\eta\overline{\eta_t}\Big] dxdt = 0. \quad (1.1.9)
\end{aligned}
$$

Đặt

$$\upsilon_p(x,t) = \int_t^0 D^p u(x,\tau)d\tau, \quad 0 < t < b,$$

ta có

$$D^p\eta(x,t) = \int_b^t D^p u(x,\tau)d\tau = \upsilon_p(x,b) - \upsilon_p(x,t).$$

Từ bổ đề 1.1.2 ta nhận được

$$(-1)^m B_1(\eta,\eta)(0) + \lambda_1\|\eta(x,0)\|^2_{L_2(\Omega)} \geqslant \mu_1 \int\limits_\Omega \sum_{|p|=0}^m |\upsilon_p(x,b)|^2 dx,$$